PC* — mathématiques **jeudi 1er décembre 2016**
Corrigé du devoir en temps libre n° 7

Corrigé du devoir en temps libre n° 7

Exercice 1. 1. Soit un entier k compris entre 0 et $p-1$.

Soit x un élément de $\mathrm{Im}(f^{k+1})$. Il existe un élément y de E vérifiant l'égalité $x = f^{k+1}(y)$. L'égalité $x = f^k(f(y))$ montre que x appartient aussi à $\mathrm{Im}(f^k)$.

On a alors montré l'inclusion $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$.

On en déduit les inégalités $\mathrm{rg}(f^p) \leqslant \mathrm{rg}(f^{p-1}) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{rg}(f^2) \leqslant \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f^0)$.

Comme f^0 est l'application identique de E et f^p est l'application nulle, on obtient

$$0 \leqslant \mathrm{rg}(f^{p-1}) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{rg}(f^2) \leqslant \mathrm{rg}(f) \leqslant n.$$

---

2. Soit k un entier naturel. Notons g_k l'application linéaire de $\mathrm{Im}(f^k)$ vers E obtenue par restriction de f. La formule du rang pour l'application linéaire g_k s'écrit comme suit

$$\mathrm{rg}(f^k) = \dim(\mathrm{Ker}(g_k)) + \mathrm{rg}(g_k).$$

Le noyau de g_k s'écrit comme suit

$$\mathrm{Ker}(g_k) = \{x \in \mathrm{Im}(f^k)\ ;\ g_k(x) = 0_{\mathrm{E}}\} = \{x \in \mathrm{Im}(f^k)\ ;\ f(x) = 0_{\mathrm{E}}\} = \mathrm{Im}(f^k) \cap \mathrm{Ker}(f).$$

L'image de g_k s'écrit comme suit

$$\mathrm{Im}(g_k) = g_k(\mathrm{Im}(f^k)) = f(\mathrm{Im}(f^k)) = f(f^k(\mathrm{E})) = f^{k+1}(\mathrm{E}) = \mathrm{Im}(f^{k+1}).$$

La formule du rang se réécrit donc comme suit

$$\mathrm{rg}(f^k) = \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^k)) + \mathrm{rg}(f^{k+1}), \qquad \text{ou encore} \qquad \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^k)) = \mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1}).$$

Cette égalité a été démontrée pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Prenons à nouveau un entier naturel k. On connaît l'inclusion $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$. On en déduit l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^k)$ puis l'inégalité

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^{k+1})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f^k)) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{rg}(f^{k+1}) - \mathrm{rg}(f^{k+2}) \leqslant \mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1}).$$

Par hypothèse, l'application f^p est nulle mais pas f^{p-1}. Le nombre $\mathrm{rg}(f^{p-1}) - \mathrm{rg}(f^p)$ est donc strictement positif. La suite de terme général $\mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ étant décroissante, le nombre $\mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ est strictement positif pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$. En particulier, les inégalités de la première question sont toutes strictes.

---

3. Les inégalités (rendues strictes) de la première question s'écrivent

$$0 < \mathrm{rg}(f^2) < \mathrm{rg}(f) < 5, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 1 \leqslant \mathrm{rg}(f^2) < \mathrm{rg}(f) \leqslant 4.$$

On connaît de plus les inégalités suivantes

$$\mathrm{rg}(f^2) \leqslant \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(f^2) \leqslant 5 - \mathrm{rg}(f).$$

On en tire les inégalités $\mathrm{rg}(f) \geqslant 2\,\mathrm{rg}(f^2)$ et $2\,\mathrm{rg}(f) \leqslant 5 + \mathrm{rg}(f^2)$.

En combinant ces deux inégalités, il vient $4\,\mathrm{rg}(f) \leqslant 10 + \mathrm{rg}(f)$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(f) \leqslant 10/3$. On en déduit que $\mathrm{rg}(f)$ vaut au plus 3 (car c'est un entier).

L'inégalité $\mathrm{rg}(f) \geqslant 2\,\mathrm{rg}(f^2)$ montre que $\mathrm{rg}(f^2)$ est majoré par $3/2$ donc par 1 car c'est un entier. L'inégalité $\mathrm{rg}(f^2) \geqslant 1$ étant connue, il reste $\mathrm{rg}(f^2) = 1$.

De l'inégalité stricte $\mathrm{rg}(f) > \mathrm{rg}(f^2)$, on tire le fait que $\mathrm{rg}(f)$ vaut 2 ou 3.

4.a. L'image de f^2 est de dimension 1. Il existe donc un vecteur e_3 de E tel que $f^2(e_3)$ soit un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Im}(f^2)$.

Comme f^3 est l'application nulle, le vecteur $f^2(e_3)$ appartient au noyau de f. Le noyau de f est de dimension 3 d'après la formule du rang. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs e_4 et e_5 de E tels que la famille $(f^2(e_3), e_4, e_5)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

4.b. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$ dans $\mathbb{R}^5$ vérifiant la relation suivante

$$\sum_{k=1}^{5} \lambda_k e_k = 0_{\mathrm{E}}, \quad \text{c'est-à-dire} \qquad \lambda_1 f^2(e_3) + \lambda_2 f(e_3) + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda 5 e_5 = 0_{\mathrm{E}}.$$

Appliquons f deux fois d'affilée. On obtient les deux égalités que voici

$$\lambda_2 f^2(e_3) + \lambda_3 + f(e_3) = 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_3 f^2(e_3) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Comme $f^2(e_3)$ n'est pas le vecteur nul, on en déduit $\lambda_3 = 0$ puis $\lambda_2 = 0$. Il reste la relation suivante

$$\lambda_1 f^2(e_3) + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = 0_{\mathrm{E}}.$$

On sait que la famille $(f^2(e_3), e_4, e_5)$ est libre. On en déduit que les nombres $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5$ sont nuls aussi.

On a montré que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est libre. C'est une famille libre de 5 vecteurs dans l'espace vectoriel E de dimension 5 donc c'est une base de E.

Les relations $f(e_1) = 0_{\mathrm{E}}$, $f(e_2) = e_1$, $f(e_3) = e_2$, $f(e_4) = 0_{\mathrm{E}}$ et $f(e_5) = 0_{\mathrm{E}}$ montrent que la matrice de f dans cette base est la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.a. La formule de la question **2** donne

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(f^2) = 2 \qquad \text{et} \qquad \dim(\mathrm{Im}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f^2) - \mathrm{rg}(f^3) = 1.$$

5.b. On connaît l'inclusion $\mathrm{Im}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$. Comme ces deux espaces vectoriels ont la même dimension, ils sont égaux : $\mathrm{Im}(f^2) \cap \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f^2)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$.

De même, on connaît l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

On sait aussi que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 par la formule du rang. Comme $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ est également de dimension 2, ces deux espaces vectoriels sont égaux.

L'égalité $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ montre que $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.

5.c. Le vecteur e_1 appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ (car $f(e_1) = f^3(e_3) = 0_{\mathrm{E}}$). Là encore, le théorème de la base incomplète donne l'existence d'un vecteur e_4 de E tel que (e_1, e_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Et comme $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(f)$, il existe un antécédent e_5 par f pour le vecteur e_4.

5.d. Prenons $(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$ dans $\mathbb{R}^5$ vérifiant l'égalité $\sum_{k=1}^{5} \lambda_k e_k = 0_{\mathrm{E}}$, c'est-à-dire

$$\lambda_1 f^2(e_3) + \lambda_2 f(e_3) + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 f(e_5) + \lambda_5 e_5 = 0_{\mathrm{E}}.$$

Là encore, on applique f deux fois :

$$\lambda_2 f^2(e_3) + \lambda_3 f(e_3) + \lambda_5 f(e_5) = 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_3 f^2(e_3) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Comme $f^2(e_3)$ n'est pas le vecteur nul, on obtient $\lambda_3 = 0$.

En reportant dans la deuxième relation, on obtient $\lambda_2 f^2(e_3)+\lambda_5 f(e_5) = 0_{\mathrm{E}}$. Comme la famille $(f^2(e_3), f(e_5))$ est libre, on en déduit que λ_2 et λ_5 sont nuls.

En reportant dans la première relation, il reste $\lambda_1 f^2(e_3)+\lambda_4 f(e_5) = 0$. Là aussi, le fait que $(f^2(e_3), f(e_5))$ soit une famille libre prouve que λ_1 et λ_4 sont nuls.

On a prouvé que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est libre. C'est une famille libre de 5 vecteurs de l'espace vectoriel E de dimension 5 donc c'est une base de E. La matrice de f dans cette base est la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Ce que l'on a fait dans cet exercice est un cas particulier de ce qu'on appelle *la réduction de Jordan*. Le théorème général de Jordan, dans le cas particulier des endomorphismes nilpotents des espaces vectoriels de dimension finie, stipule que tout endomorphisme de ce type admet une représentation matricielle dont tous les coefficients sont nuls sauf certains coefficients juste au-dessus de la diagonale, qui sont égaux à 1. Le théorème précise même qu'en disposant les 1 d'une certaine manière, cette représentation est unique.

On a prouvé ici le cas particulier du théorème de Jordan dans le cas d'un espace vectoriel de dimension 5 et d'un endomorphisme dont l'indice de nilpotence vaut 3. On pourra s'amuser à faire de même avec, par exemple, un indice de nilpotence égal à 4.

Exercice 2. 1. Résolvons cette question par analyse-synthèse.

Supposons que nous connaissons un triplet (λ, μ, ν) solution. En appliquant l'égalité en a puis en b, on trouve successivement

$$\nu = \frac{1}{a-b} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{1}{(b-a)^2}.$$

En utilisant l'unicité du coefficient en X^2, on trouve ensuite $\mu = -\lambda = -1/(b-a)^2$.

Jusqu'ici, on a seulement prouvé qu'au plus un triplet (λ, μ, ν) convient, ce qui ne répond à aucune question posée. Passons donc à la réciproque.

Posons

$$\lambda = \frac{1}{(b-a)^2}, \qquad \mu = -\frac{1}{(b-a)^2}, \qquad \nu = -\frac{1}{b-a}.$$

Vérifions que ce triplet convient. Pour cela, on peut se contenter de développer l'expression

$$\lambda(\mathrm{X}-a)^2 + \mu(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b) + \nu(\mathrm{X}-b)$$

par la force brute et constater que tout s'arrange bien.

On peut aussi être un peu plus subtil et exploiter le fait que λ et μ sont opposés

$$\lambda(\mathrm{X}-a)^2 + \mu(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b) = \frac{1}{(b-a)^2}(\mathrm{X}-a)((\mathrm{X}-a)-(\mathrm{X}-b)) = \frac{1}{b-a}(\mathrm{X}-a)$$

puis

$$\lambda(\mathrm{X}-a)^2 + \mu(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b) + \nu(\mathrm{X}-b) = \frac{1}{b-a}((\mathrm{X}-a)-(\mathrm{X}-b)) = 1.$$

---

2. Soit x dans $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. On trouve alors

$$f(x) = bx \qquad \text{et} \qquad (f - a\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^2(x) = 0_{\mathrm{E}},$$

donc

$$(f - a\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(bx - ax) = 0_{\mathrm{E}} \qquad \text{puis} \qquad (b-a)^2 x = 0_{\mathrm{E}}.$$

Comme b et a sont distincts, on trouve finalement $x = 0_{\mathrm{E}}$.

$\boxed{\text{Les sous-espaces F et G sont en somme directe.}}$

---

3. Prouvons d'abord que F et G sont inclus dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f))$.

Prenons d'abord x dans G.

$$\mathrm{P}(f)(x) = (f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2(f(x) - b(x)) = (f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}.$$

On en déduit que x est un élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f))$.

L'inclusion $\mathrm{G} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f))$ est prouvée.

Soit maintenant x dans F. Remarquons l'égalité $\mathrm{P}(f) = (f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2$, due au fait que les polynômes en f commutent entre eux.

$$\mathrm{P}(f)(x) = (f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})((f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2(x)) = (f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E}.$$

On en déduit que x est un élément de $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f))$.

L'inclusion $\mathrm{F} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f))$ est prouvée.

Comme F et G sont inclus dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f))$ et sont en somme directe, on peut déjà écrire

$$\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f)).$$

Réciproquement, prenons x dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f))$. Appliquons la formule de la question 1 à l'endomorphisme f.

$$\lambda(f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2 + \mu(f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E}) + \nu(f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}.$$

Appliquons cette égalité en x.

$$\lambda(f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2(x) + \mu(f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})((f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x)) + \nu(f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = x.$$

On remarque maintenant que $\lambda(f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2(x)$ est un élément de G et que $\mu(f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})((f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x)) + \nu(f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x)$ est un élément de F. On a donc montré que x appartient à $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

L'inclusion réciproque $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f)) \subset \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ est donc prouvée.

$\boxed{\text{Par double inclusion, l'égalité } \mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f)) = \mathrm{Ker}((f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \text{ est prouvée.}}$

---

4. Considérons l'endomorphisme $f : y \mapsto y'$ de l'espace vectoriel réel $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle proposée est le noyau de $f^3 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Remarquons la factorisation

$$\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X} + 2 = (\mathrm{X} - 1)^2(\mathrm{X} + 2).$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle proposée s'écrit donc

$$\mathrm{Ker}(f^3 - 3f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})^2) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}).$$

Cet ensemble est donc l'espace vectoriel engendré par les trois fonctions ci-dessous

$$x \mapsto \mathrm{e}^x, \qquad x \mapsto x\mathrm{e}^x, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}.$$

---

5. Cette fois, on considère l'endomorphisme

$$\sigma : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

de l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On cherche ici le noyau de $\sigma^3 + 2\sigma^2 - 4\sigma - 8\mathrm{Id}_\mathrm{E}$. On trouve la factorisation

$$\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} - 8 = (\mathrm{X}+2)^2(\mathrm{X}-2).$$

On en déduit l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\sigma^3 + 2\sigma 2 - 4\sigma - 8\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Ker}((\sigma + 2\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2) \oplus \mathrm{Ker}(\sigma - 2\mathrm{Id}_\mathrm{E}).$$

L'ensemble des suites réelles vérifiant la relation de récurrence proposée est donc l'espace engendré par les trois suites ci-dessous.

$$((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (n(-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (2^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 3. 1. Si la matrice B est nulle, alors tous les blocs $a_{i,j}\mathrm{B}$ sont nuls donc la matrice $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est nulle.

Si la matrice A est nulle, alors tous les blocs $a_{i,j}\mathrm{B}$ sont nuls donc la matrice $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est nulle.

Si la matrice A n'est pas nulle, alors il existe un couple (i,j) d'indices pour lequel le coefficient $a_{i,j}$ n'est pas nul ; si de plus la matrice B n'est pas nulle, alors le bloc $a_{i,j}\mathrm{B}$ n'est pas nul, si bien que la matrice $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ n'est pas nulle.

Ainsi, la matrice $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est nulle si, et seulement si, l'une au moins des matrices A et B est nulle.

2.a. La matrice $\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y}$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} x_1\mathrm{Y} \\ x_2\mathrm{Y} \\ \vdots \\ x_n\mathrm{Y}\end{pmatrix}$. Effectuons le produit demandé

$$(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\cdot(\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y}) = \begin{pmatrix} a_{1,1}\mathrm{B} & a_{1,2}\mathrm{B} & \cdots & a_{1,n}\mathrm{B} \\ a_{2,1}\mathrm{B} & a_{2,2}\mathrm{B} & \cdots & a_{2,n}\mathrm{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\mathrm{B} & a_{n,2}\mathrm{B} & \cdots & a_{n,n}\mathrm{B}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\mathrm{Y} \\ x_2\mathrm{Y} \\ \vdots \\ x_n\mathrm{Y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n)\mathrm{B}\cdot\mathrm{Y} \\ \vdots \\ (a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n)\mathrm{B}\cdot\mathrm{Y}\end{pmatrix}.$$

Les coefficients en facteur de $\mathrm{B}\cdot\mathrm{Y}$ sont ceux de la matrice colonne $\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}$.

On a donc montré l'égalité $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\cdot(\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y}) = (\mathrm{A}\cdot\mathrm{X})\otimes(\mathrm{B}\cdot\mathrm{Y})$.

2.b. La démonstration repose ici sur le même principe

$$(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}'\otimes\mathrm{B}') = \begin{pmatrix} a_{1,1}\mathrm{B} & a_{1,2}\mathrm{B} & \cdots & a_{1,n}\mathrm{B} \\ a_{2,1}\mathrm{B} & a_{2,2}\mathrm{B} & \cdots & a_{2,n}\mathrm{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\mathrm{B} & a_{n,2}\mathrm{B} & \cdots & a_{n,n}\mathrm{B}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'_{1,1}\mathrm{B}' & a'_{1,2}\mathrm{B}' & \cdots & a'_{1,n}\mathrm{B}' \\ a'_{2,1}\mathrm{B}' & a'_{2,2}\mathrm{B}' & \cdots & a'_{2,n}\mathrm{B}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1}\mathrm{B}' & a'_{n,2}\mathrm{B}' & \cdots & a'_{n,n}\mathrm{B}'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{1,1}\mathrm{BB}' & c_{1,2}\mathrm{BB}' & \cdots & c_{1,n}\mathrm{BB}' \\ c_{2,1}\mathrm{BB}' & c_{2,2}\mathrm{BB}' & \cdots & c_{2,n}\mathrm{BB}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1}\mathrm{BB}' & c_{n,2}\mathrm{BB}' & \cdots & c_{n,n}\mathrm{BB}'\end{pmatrix},$$

avec $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}a'_{k,j}$, ce qui est le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}'$.

On a donc montré l'égalité $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}'\otimes\mathrm{B}') = (\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}')\otimes(\mathrm{B}\cdot\mathrm{B}')$.

---

3. La règle de calcul précédente permet de montrer par récurrence l'égalité $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})^k = \mathrm{A}^k\otimes\mathrm{B}^k$ pour tout entier k. Ainsi, la matrice $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})^k$ est nulle si, et seulement si, la matrice $\mathrm{A}^k\otimes\mathrm{B}^k$ est nulle, ce qui équivaut à ce que A^k ou B^k soit nulle d'après **1**.

Ainsi, la matrice $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est nilpotente si, et seulement si, A ou B est nilpotente.

4.a. On remarque l'égalité $(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}^{-1}\otimes\mathrm{B}^{-1}) = \mathrm{I}_n\otimes\mathrm{I}_p$.

En écrivant $\mathrm{I}_n\otimes\mathrm{I}_p$ (on l'écrit vraiment !), on remarque qu'il s'agit de la matrice I_{np}.

Ainsi, la matrice $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est inversible, d'inverse $\mathrm{A}^{-1}\otimes\mathrm{B}^{-1}$.

4.b. La matrice C est proposée est $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$, où A et B sont les matrices données en exemple dans le préambule de l'énoncé.

La matrice A a un déterminant égal à 3. Elle est donc inversible, d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

De plus, la méthode du pivot (qu'il faut faire figurer entièrement sur la copie) montre que B est inversible, avec $\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

La matrice $\mathrm{C} = \mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est donc inversible, d'inverse

$$\mathrm{C}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}\otimes\mathrm{B}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

5.a. La matrice $\mathrm{J}_n(r)\otimes\mathrm{J}_p(s)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ diagonale par blocs avec n blocs diagonaux de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont les r premiers sont $\mathrm{J}_p(s)$ et les $n-r$ autres sont nuls.

Cette matrice est donc diagonale avec rs coefficients 1 sur la diagonale, les autres coefficients diagonaux étant nuls. Elle est donc de rang rs.

Remarquons que cette propriété est encore valable dans le cas où r ou s est nul.

5.b. Notons $r = \operatorname{rg}\mathrm{A}$ et $s = \operatorname{rg}\mathrm{B}$. On sait [1] qu'il existe des matrices inversibles $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R},\mathrm{S}$ vérifiant les égalités $\mathrm{A} = \mathrm{P}\mathrm{J}_n(r)\mathrm{Q}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{R}\mathrm{J}_p(s)\mathrm{S}$.

On obtient $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B} = (\mathrm{P}\otimes\mathrm{R})(\mathrm{J}_n(r)\otimes\mathrm{J}_p(s))(\mathrm{Q}\otimes\mathrm{S})$. Les matrices $\mathrm{P}\otimes\mathrm{R}$ et $\mathrm{Q}\otimes\mathrm{S}$ étant inversibles, on en déduit les égalités

$$\operatorname{rg}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}) = \operatorname{rg}(\mathrm{J}_n(r)\otimes\mathrm{J}_p(s)) = rs = \operatorname{rg}(\mathrm{A})\operatorname{rg}(\mathrm{B}).$$

5.c. On suppose que $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ est inversible. On obtient alors $\operatorname{rg}(\mathrm{A})\operatorname{rg}(\mathrm{B}) = \operatorname{rg}(\mathrm{A}\times\mathrm{B}) = np$.

On connaît de plus les inégalités $\operatorname{rg}(\mathrm{A}) \leqslant n$ et $\operatorname{rg}(\mathrm{B}) \leqslant p$. La seule possibilité est $\operatorname{rg}(\mathrm{A}) = n$ et $\operatorname{rg}(\mathrm{B}) = p$, si bien que A et B sont inversibles.

La réciproque a été démontrée en **4.a**.

1. En réalité, ce fait n'est plus à notre programme.

---

6. On suppose dans un premier temps que la matrice A est triangulaire inférieure. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est alors triangulaire inférieure par blocs et on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) &= \mathrm{d\acute{e}t} \begin{pmatrix} a\mathrm{B} & 0 \\ c\mathrm{B} & d\mathrm{B} \end{pmatrix} = \mathrm{d\acute{e}t}(a\mathrm{B})\,\mathrm{d\acute{e}t}(d\mathrm{B}) = a^p\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}) \times d^p\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}) = (ad)^p(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}))^2 \\ &= (\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A}))^p(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}))^2. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la matrice A n'est pas triangulaire inférieure. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et le coefficient b n'est pas nul. La matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ s'écrit

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a\mathrm{B} & b\mathrm{B} \\ c\mathrm{B} & d\mathrm{B}. \end{pmatrix}$$

Utilisons que b n'est pas nul pour effectuer une sorte d'opération du pivot. L'opération ressemble à $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - (a/b)\mathrm{C}_2$ par blocs. Cette opération s'effectue simplement en multipliant à droite par une matrice bien choisie.

$$\begin{pmatrix} a\mathrm{B} & b\mathrm{B} \\ c\mathrm{B} & d\mathrm{B} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ -\frac{a}{b}\mathrm{I}_p & \mathrm{I}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b\mathrm{B} \\ (c - \frac{ad}{b})\mathrm{B} & d\mathrm{B} \end{pmatrix}.$$

La matrice par laquelle on a multiplié a un déterminant égal à 1. On trouve donc

$$\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) = \mathrm{d\acute{e}t} \begin{pmatrix} 0 & b\mathrm{B} \\ (c - \frac{ad}{b})\mathrm{B} & d\mathrm{B} \end{pmatrix}.$$

On effectue maintenant les n échanges de colonnes $\mathrm{C}_1 \leftrightarrow \mathrm{C}_{p+1}, \ldots, \mathrm{C}_p \leftrightarrow \mathrm{C}_{2p}$. Chaque échange de colonnes change le déterminant en son opposé.

$$\begin{aligned} \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) &= (-1)^p\,\mathrm{d\acute{e}t} \begin{pmatrix} b\mathrm{B} & 0 \\ d\mathrm{B} & (c - \frac{ad}{b})\mathrm{B} \end{pmatrix} = (-1)^p b^p \left(c - \frac{ad}{b}\right)^p (\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}))^2 = (ad - bc)^p(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}))^2 \\ &= (\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A}))^p(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}))^2. \end{aligned}$$

L'égalité attendue est donc démontrée dans tous les cas.

Remarque. Comme on peut s'en douter, si on avait pris A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la formule aurait été

$$\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) = (\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A}))^p(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B}))^n.$$

La démonstration serait sensiblement la même, à savoir un calque de la méthode du pivot.
