

PC* 26 - DEVOIR N° 19

corrigé

Raie d'absorption de l'ammoniac

Centrale-Supélec

A.1) L'énergie potentielle est une fonction paire de x car les trois atomes d'hydrogène avec lesquels interagit l'azote forme un plan de symétrie du problème. L'énergie potentielle possède deux minimums correspondant aux positions d'équilibre stable de l'azote de part et d'autre du plan de référence. Ces deux positions sont séparées par un maximum indiquant qu'une certaine énergie est nécessaire pour passer de l'abscisse $-b$ à l'abscisse b . Aux extrémités, l'énergie potentielle tend vers l'infini ce qui indique que l'atome d'azote est confiné, lié aux atomes d'hydrogène qu'il ne peut pas quitter.

A.2) On calcule $k_B T_{PT} = 3,8 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,024 \text{ eV}$ à comparer à $V_0 = 0,25 \text{ eV}$. Comme $k_B T_{PT} \ll V_0$, l'agitation thermique ne procure pas suffisamment d'énergie pour franchir la barrière.

L'inversion thermique se produit à la température T telle que $k_B T = V_0$ ce qui donne $T = 2,9 \cdot 10^3 \text{ K}$. De telles conditions sont rares !

B.1) L'équation III.1 est celle de Schrödinger aux états stationnaires, bien connue pour les fonctions d'onde de la forme $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$. C'est du cours, mais l'énoncé demande une démonstration. On calcule

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\hbar \times \left(-\frac{iE}{\hbar} \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} \right) = E \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} .$$

La fonction ψ est solution de l'équation de Schrödinger si et seulement si

$$E \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} e^{-iEt/\hbar} + V(x) \varphi(x) e^{-iEt/\hbar} .$$

En simplifiant par $e^{-iEt/\hbar}$ et en réarrangeant les termes, on obtient

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \varphi(x) = 0 .$$

B.2.a) L'utilisation de l'adjectif « localisée » n'est pas prévue par le programme, mais on en devine le sens. Dire qu'une fonction d'onde est localisée sur un domaine signifie qu'elle est nulle hors de ce domaine. La densité de probabilité de présence y est aussi nulle, et il vaudrait mieux dire que *la particule* est localisée sur le domaine. Les conditions de bord expriment la continuité de φ et s'écrivent $\varphi(\pm x_0) = 0$ et $\varphi(\pm(\ell + x_0)) = 0$.

B.2.b) Pour $|x| < x_0$ et $|x| > x_0 + \ell$, le potentiel est « infini ». Dans ce cas, on sait que la fonction d'onde est nulle.

B.2.c)

$$\int_{-(x_0+\ell)}^{-x_0} |\varphi_A(x)|^2 dx = 1 \quad \int_{x_0}^{x_0+\ell} |\varphi_B(x)|^2 dx = 1$$

B.3.a) Sur l'intervalle A , $V(x) = 0$ donc l'équation III.1 s'écrit

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 .$$

Posons $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. La solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$\varphi(x) = M \cos(k(x + x_0)) + N \sin(k(x + x_0)) .$$

Introduire x_0 dans les fonctions trigonométriques facilite l'écriture des conditions de bord :

$$\begin{aligned} \varphi(-x_0) = 0 & \quad M \cos(0) + N \sin(0) = 0 & \quad M = 0 \\ \varphi(-x_0 - \ell) = 0 & \quad N \sin(k\ell) = 0 & \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, k\ell = n\pi \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell} \end{aligned}$$

L'énergie associée à l'indice n est

$$E_n^A = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m\ell^2} .$$

La condition de normalisation s'écrit

$$\int_{-x_0-\ell}^{x_0} |N|^2 \sin^2 k(x+x_0) dx = 1 \quad \text{ou par changement de variable} \quad |N|^2 \int_{-\ell}^0 \sin^2 ku du = 1 .$$

On peut calculer l'intégrale par linéarisation de \sin^2 , mais il est plus rapide de remarquer que, sur un nombre entier d'oscillations, on peut remplacer \sin^2 par sa moyenne égale à $1/2$. L'intégrale vaut donc $\ell/2$ et on trouve

$$|N| = \sqrt{\frac{2}{\ell}} .$$

L'argument de F est sans importance et nous le choisissons nul.

$$\text{Pour } x \in A, \varphi_n^A(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}(x+x_0)\right)$$

Rappelons que $\varphi_n^A(x)$ est nulle hors de l'intervalle A .

B.3.b) De manière analogue,

$$E_n^B = E_n^A \quad \text{et} \quad \varphi_n^B(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}(x-x_0)\right) .$$

Rappelons que $\varphi_n^B(x)$ est nulle hors de l'intervalle B .

B.3.c) La fonction d'onde et la densité de probabilité sont

$$\phi_n^A(x, t') = \varphi_n^A(x) e^{-iE_n t'/\hbar} \quad |\varphi_n^A(x)|^2 = \varphi_n^A(x)^2 .$$

Pour $x \in [x_0, x_0 + \ell]$, $\varphi_n^A(x) = 0$ donc cette densité de probabilité est nulle, de même que son intégrale sur l'intervalle B . La probabilité de trouver l'atome d'azote du côté droit est donc nulle. Dans ce modèle, l'atome d'azote initialement placé à gauche dans l'état ψ_n^A , y demeure perpétuellement. L'inversion n'est pas possible.

B.4) Dans l'intervalle considéré, $V = 0$ donc d'équation de Schrödinger s'écrit

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi = 0 .$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$\varphi(x) = C \cos(k(x-x_0-\ell)) + D \sin(k(x-x_0-\ell)) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} .$$

Pour $x = x_0 + \ell$, le potentiel est infini donc $\varphi(x_0 + \ell) = 0$, ce qui s'exprime par $C \cos(0) + D \sin(0) = 0$ donc $C = 0$. En renommant la constante $D = \mathcal{B}$, on a

$$\varphi_B(x) = \mathcal{B} \sin(k(x-x_0-\ell)) .$$

Par analogie,

$$\varphi_A(x) = \mathcal{A} \sin(k(x+x_0+\ell)) .$$

B.5.a) Dans l'intervalle considéré, $V = 0$ donc d'équation de Schrödinger s'écrit

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\varphi = 0 .$$

Comme $E \leq V_0$, $E - V_0 \leq 0$ et on introduit

$$K = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar .$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors comme l'énoncé le propose :

$$\varphi_C(x) = C_1 \cosh(Kx) + C_2 \sinh(Kx) .$$

B.5.b) La fonction d'onde et sa dérivée première sont continues en x_0 .

$$\begin{aligned}\varphi_C(x_0) &= \varphi_B(x_0) & C_1 \cosh(Kx_0) + C_2 \sinh(Kx_0) &= -\mathcal{B} \sin(k\ell) \\ \frac{d\varphi_C}{dx}(x_0) &= \frac{d\varphi_B}{dx}(x_0) & KC_1 \sinh(Kx_0) + KC_2 \cosh(Kx_0) &= k\mathcal{B} \cos(k\ell)\end{aligned}$$

B.6.a) Observons les graphes de φ_1^{sym} et φ_1^{anti} . À la précision de lecture du graphique près, ces fonctions sont égales pour $x < 0$ et opposées pour $x > 0$. En les ajoutant, on obtient la fonction φ_G qui est presque nulle pour $x > 0$ et qui concentre toute la probabilité dans l'intervalle $[-x_0 - \ell, -x_0]$. De manière analogue, la fonction

$$\varphi_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1^{\text{sym}}(x) - \varphi_1^{\text{anti}}(x))$$

est presque nulle pour $x > 0$ et concentre toute la probabilité dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \ell]$.

B.6.β)

$$\begin{aligned}\rho_G(x) &= \varphi_G(x)^2 = \frac{1}{2}(\varphi_1^{\text{sym}}(x))^2 + \frac{1}{2}(\varphi_1^{\text{anti}}(x))^2 + \varphi_1^{\text{sym}}(x)\varphi_1^{\text{anti}}(x) \\ \rho_D(x) &= \varphi_D(x)^2 = \frac{1}{2}(\varphi_1^{\text{sym}}(x))^2 + \frac{1}{2}(\varphi_1^{\text{anti}}(x))^2 - \varphi_1^{\text{sym}}(x)\varphi_1^{\text{anti}}(x)\end{aligned}$$

B.6.a) À l'instant initial, $\psi(x, 0)$ est une combinaison linéaire de deux états stationnaires. Ensuite, $\psi(x, t)$ évolue selon l'équation de Schrödinger dépendant du temps et, comme nous l'avons vu en cours, elle s'obtient en combinant linéairement les états stationnaires présents dans la condition initiale.

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1^{\text{sym}}(x) e^{-iE_1^{\text{sym}}t/\hbar} + \varphi_1^{\text{anti}}(x) e^{-iE_1^{\text{anti}}t/\hbar} \right) .$$

B.6.b) Comme $|e^{i\alpha}| = 1$, les deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 conduisent à la même densité de probabilité et décrivent donc le même état physique. En effet

$$|\psi_2|^2 = |\psi_1 e^{i\alpha}|^2 = |\psi_1|^2 |e^{i\alpha}|^2 = |\psi_1|^2 .$$

B.6.c)

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_1^{\text{anti}}t/\hbar} \left(\varphi_1^{\text{sym}}(x) e^{i(E_1^{\text{anti}} - E_1^{\text{sym}})t/\hbar} + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \right) .$$

D'après la question précédent, il revient au même de considérer

$$\psi_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_1^{\text{sym}}(x) e^{i(E_1^{\text{anti}} - E_1^{\text{sym}})t/\hbar} + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \right) .$$

Comme la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π périodique, ψ_2 est périodique dans le temps avec une période et une fréquence données par

$$\tau = \frac{2\pi\hbar}{E_1^{\text{anti}} - E_1^{\text{sym}}} = \frac{h}{\delta E} \quad f = \frac{\delta E}{h} = 23,8 \text{ GHz} .$$

La longueur d'onde électromagnétique correspondante est $\lambda = c/f = 12,6 \text{ cm}$, il s'agit d'ondes centimétriques.

B.6.d)

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= |\psi_2(x, t)|^2 = \psi_2(x, t)\psi_2^*(x, t) = \frac{1}{2} \left(\varphi_1^{\text{sym}}(x) e^{i\delta Et/\hbar} + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \right) \left(\varphi_1^{\text{sym}}(x) e^{-i\delta Et/\hbar} + \varphi_1^{\text{anti}}(x) \right) \\ \rho(x, t) &= \frac{1}{2} \left((\varphi_1^{\text{sym}})^2 + (\varphi_1^{\text{anti}})^2 + 2\varphi_1^{\text{sym}}(x)\varphi_1^{\text{anti}}(x) \cos \frac{\delta Et}{\hbar} \right) .\end{aligned}$$

À cause du facteur en cosinus, on retrouve la périodicité évoquée dans la question précédente.

— Pour $t = q\tau$ avec $q \in \mathbb{N}$, $\cos(\delta Et/\hbar) = 1$ donc

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left((\varphi_1^{\text{sym}})^2 + (\varphi_1^{\text{anti}})^2 + 2\varphi_1^{\text{sym}}(x)\varphi_1^{\text{anti}}(x) \right) = \rho_G(x) .$$

La probabilité de présence est concentrée dans l'intervalle $[-x_0 - \ell, -x_0]$ donc l'atome d'azote se trouve très certainement à gauche.

— Pour $t = (q + 1/2)\tau$ avec $q \in \mathbb{N}$, $\cos(\delta Et/\hbar) = -1$ donc

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \left((\varphi_1^{\text{sym}})^2 + (\varphi_1^{\text{anti}})^2 - 2\varphi_1^{\text{sym}}(x)\varphi_1^{\text{anti}}(x) \right) = \rho_D(x) \quad .$$

La probabilité de présence est concentrée dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \ell]$ donc l'atome d'azote se trouve très certainement à droite.

B.6.e) À $t = \tau/2$, $\delta Et/\hbar = \pi$ et

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\varphi_1^{\text{sym}} + \varphi_1^{\text{anti}}) = -\varphi_D$$

Le signe moins est sans importance. L'atome d'azote est dans l'état ϕ_D , il se trouve à droite. Son énergie E est inférieure à celle de la barrière et, selon les lois de la mécanique classique, il ne peut pas la franchir. Il y parvient cependant en mécanique quantique : c'est l'effet tunnel.

B.6.f) L'expression de δE montre que c'est une fonction décroissante de x_0 et de V_0 . Plus la barrière est haute et/ou épaisse, plus la fréquence d'inversion diminue. La suite du calcul est assez pénible. Notons $V'_0 = 6V_0$ et $x'_0 = 5x_0$ les valeurs concernant l'arsine.

$$\delta E' = \frac{4\pi^2 \hbar^3 \exp(-2 \times 5x_0 \sqrt{2m \times 6V_0}/\hbar)}{m\ell^3 \sqrt{2m \times 6V_0}}$$

Posons $A = 2x_0 \sqrt{2mV_0}/\hbar$. On alors

$$\delta E = \frac{1}{\sqrt{2mV_0}} \frac{4\pi^2 \hbar^3}{m\ell^3} e^{-A} \quad \text{et} \quad \delta E' = \frac{1}{\sqrt{6}} \delta E e^A e^{-5A/\sqrt{6}} = \frac{\delta E}{\sqrt{6}} e^{A(1-5\sqrt{6})}$$

$$A = 3,47 \quad \delta E' = 4,7 \cdot 10^{-18} \delta E \quad \delta f' = 4,7 \cdot 10^{-18} f = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ Hz} \quad \tau' = 8,9 \cdot 10^7 \text{ s} \simeq 3 \text{ ans} \quad .$$

L'inversion de l'arsine est très lente. À l'échelle de temps d'une expérience de laboratoire, l'inversion n'a pas lieu.

C.1) En combinant les équations de Maxwell et en utilisant l'expression du double rotationnel, on obtient selon un calcul vu en cours

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad .$$

Pour l'OPPH proposée, $\vec{\nabla} \rightarrow -ik$ et $\partial_t \rightarrow i\omega$. Le champ fourni est solution de l'équation d'onde si et seulement si

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \gamma i\omega \quad .$$

C.2.a) Pour $\underline{k} = k_r - ik_i$, $\underline{k}^2 = k_r^2 - k_i^2 - 2ik_r k_i$. En reportant dans la relation de dispersion et en identifiant les parties imaginaires, on obtient

$$2k_r k_i = \mu_0 \gamma \omega > 0 \quad .$$

Comme l'onde se propage vers les x croissants, $k_r > 0$ et donc $k_i > 0$. L'onde étudiée s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - k_r x)} e^{-k_i x} \quad .$$

L'exponentielle décroît avec x . Ainsi l'onde s'atténue le long de sa propagation.

C.2.b) Par définition, I est la moyenne temporelle de $|\vec{\pi}|$: $I = \langle |\vec{\pi}| \rangle$. Supposons que la cuve occupe l'intervalle $[0, L]$. Juste avant la cuve, en $x = 0^-$, on est dans le vide on peut calculer \vec{B} par la relation de structure pour obtenir le résultat usuel

$$I(0) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad .$$

À la sortie de la cuve, en $x = L^+$, $\vec{E} = E_0 e^{-k_i L} \cos(\omega - k_r L)$. On peut à nouveau faire le calcul de $\vec{\pi}$ dans le vide pour trouver

$$I(L) = \frac{E_0^2 e^{-2k_i L}}{2\mu_0 c} \quad .$$

On a donc $I(L) = I(0) e^{-\alpha L}$ avec $\alpha = 2k_i$.

On peut aussi obtenir ce résultat en calculant $\vec{\pi}$ dans le matériau et calculer I en $x = 0^+$ et $x = L^-$, mais il faut pour cela calculer \vec{B} dans le matériau. C'est un peu plus difficile et nous l'avons fait dans le cours.

C.3.a) $\lambda = c/\nu_0 = 10,3 \mu\text{m}$, infrarouge. $E_\gamma = h\nu_0 = 0,12 \text{ eV}$.

C.3.b) La transition entre les niveaux d'énergies E_1 et E_2 est associée à l'absorption d'un photon d'énergie $h\nu = E_2 - E_1$. Si E_2 est défini à une certaine largeur près, alors il en résulte une largeur en fréquence $\delta\nu$ telle que $h\delta\nu = \delta E_2$ c'est à dire $\delta\nu = \delta E_2/h = 4,83 \text{ MHz}$.

C.4.a)

$$\phi = \omega t - kx = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

C.4.b) La relation de Chasles donne $x' = x - v_x t$ ou $x = x' + v_x t$.

$$\phi = 2\pi\nu \left(t - \frac{x' + v_x t}{c} \right) = 2\pi\nu \left(t \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) - \frac{x'}{c} \right) = 2\pi\nu \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) \left(t - \frac{x'}{c - v_x} \right)$$

En écrivant directement la phase dans \mathcal{R}' , on a

$$\phi = 2\pi\nu' \left(t - \frac{x'}{c'} \right) .$$

En identifiant les deux expressions de ϕ , on obtient

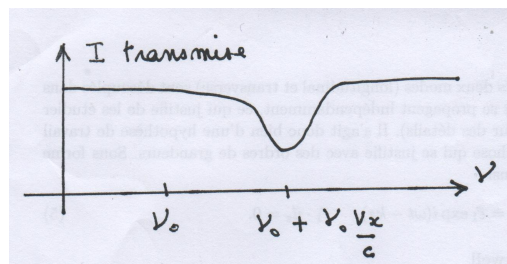
$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v_x}{c} \right) \quad \text{qui se réécrit} \quad v_x = \frac{\nu - \nu'}{\nu'} c .$$

L'effet Doppler est utilisée pour mesurer la vitesse des véhicules par radar.

C.4.c) Une molécule absorbe un photon si sa fréquence ν' mesurée dans le référentiel de la molécule vaut ν_0 (à $\delta\nu$ près). Pour $v_x > 0$, la fréquence $\nu' = \nu(1 - v_x/c)$ vue par la molécule est inférieure à celle mesurée dans le référentiel du laboratoire. Il faut donc que la fréquence dans le référentiel du laboratoire soit supérieure à ν_0 pour que l'absorption ait lieu.

$$\nu' = \nu_0 \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_0}{1 - v_x/c} \simeq \nu_0(1 + v_x/c) = \nu_0 + \frac{\nu_0 v_x}{c}$$

Le spectre est donc décalé de $\nu_0 v_x/c$ vers les hautes fréquences. Si $\nu_0 v_x/c > \delta\nu$, ce décalage est plus élevée que la largeur naturelle de la raie est on peut le détecter.



Effet Hall quantique

1. On assimile Δp_x à l'ordre de grandeur de p_x autour de la valeur nulle. Δx est ici ℓ_x . L'inégalité de Heisenberg $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ donne $\ell_x p_x \geq \hbar$ soit $p_x \geq \frac{\hbar}{\ell_x}$. L'énergie est uniquement cinétique :

$$E = \frac{p_x^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2m\ell_x^2} \quad \boxed{E_{\min} \approx \frac{\hbar^2}{2m\ell_x^2}} .$$

2. La forme $\Psi = \phi(x, y)e^{-i\omega t}$ sépare par produit les variables d'espace et de temps. Cela rappelle une onde stationnaire en mécanique. La densité de probabilité $|\Psi|^2 = |\phi(x, y)|^2$ est indépendante du temps, d'où l'adjectif « stationnaire ». L'énergie est $E = \hbar\omega$.

3. La fonction d'onde Ψ vérifie l'équation de Schrödinger dépendant du temps

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(x, y) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} .$$

Comme $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega\phi e^{-i\omega t}$, on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}e^{-i\omega t}\Delta\phi + V(x,y)e^{-i\omega t}\phi = \hbar\omega\phi e^{-i\omega t}$$

et en simplifiant par $e^{-i\omega t}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi + V(x,y)\phi = E\phi$$

avec $E = \hbar\omega$, ce qui constitue l'équation de Schrödinger aux états stationnaires. En dehors de $[0, \ell_x] \times [0, \ell_y]$, $V(x,y) \rightarrow \infty$ donc $\phi = 0$. On cherche donc ϕ uniquement sur le rectangle dans lequel les électrons sont confinés.

4. Pour $\phi = H(x)G(y)$, $\Delta\phi = H''(x)G(y) + H(x)G''(y)$ et l'équation s'écrit :

$$(H''(x)G(y) + H(x)G''(y))\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\right) = EG(y)H(x)$$

puis en divisant membre à membre par GH

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{H''(x)}{H(x)} + \frac{G''(y)}{G(y)}\right) = E \quad .$$

Les variables x et y sont séparées. Cette relation est vraie pour tout (x,y) dans le rectangle. On peut fixer x et varier y , ou inversement. On en déduit que $\frac{H''}{H}$ et $\frac{G''}{G}$ sont des constantes que l'on nomme $-Q_x$ et $-Q_y$.

$$\frac{H''}{H} = -Q_x \quad \frac{G''}{G} = -Q_y$$

Ces deux relations s'écrivent encore

$$H''(x) + Q_x H(x) = 0 \quad G''(y) + Q_y G(y) = 0 \quad .$$

L'énergie s'exprime par

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}(Q_x + Q_y)$$

5. On résout l'équation différentielle portant sur H :

$$H(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad .$$

Les conditions de bord sont $H(0) = 0$ et $H(\ell_x) = 0$. On en déduit $A = 0$ et

$$k_x = m_x \frac{\pi}{\ell_x} \quad m_x \in \mathbb{N}^* .$$

Finalement,

$$H(x) = B \sin\left(m_x \frac{\pi x}{\ell_x}\right) \quad .$$

6. De même, il existe une constante C telle que

$$k_y = m_y \frac{\pi}{\ell_y} \quad \text{et} \quad G(y) = C \sin\left(m_y \frac{\pi y}{\ell_y}\right) \quad .$$

La partie spatiale de la fonction d'onde est donnée par

$$\phi = BC \sin\left(m_x \frac{\pi x}{\ell_x}\right) \sin\left(m_y \frac{\pi y}{\ell_y}\right)$$

Exploisons la condition de normalisation :

$$\int_0^{\ell_x} \int_0^{\ell_y} |BC|^2 \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) dx dy = 1$$

$$|BC|^2 \frac{\ell_x}{2} \frac{\ell_y}{2} = 1 \quad |BC| = \frac{2}{\sqrt{\ell_x \ell_y}}$$

On choisit arbitrairement BC réel pour écrire

$$\phi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\ell_x \ell_y}} \sin\left(m_x \frac{\pi x}{\ell_x}\right) \sin\left(m_y \frac{\pi y}{\ell_y}\right) .$$

7. En éliminant Q_x et Q_y dans l'expression de la question 4, on trouve

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{m_x^2}{l_x^2} + \frac{m_y^2}{l_y^2} \right) .$$

8. (a) On a $E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2)$

$$E \leq E_{\max} \quad \text{donne} \quad k_x^2 + k_y^2 \leq \frac{2mE_{\max}}{\hbar^2}$$

$$k_{\max}^2 = \frac{2mE_{\max}}{\hbar^2} .$$

(b) Comme $k_x = m_x \frac{\pi}{\ell_x}$, $\Delta k_x = \frac{\pi}{\ell_x}$. De même, $\Delta k_y = \frac{\pi}{\ell_y}$

$$\Delta^2 k = \Delta k_x \Delta k_y \quad \Delta^2 k = \frac{\pi^2}{l_x l_y} \quad \Delta^2 k = \frac{\pi^2}{S} .$$

(c) Les couples (k_x, k_y) tels que $k_x^2 + k_y^2 \leq k_{\max}^2$ sont situés dans le quart de disque de rayon k_{\max} . On obtient leur nombre en divisant l'aire de ce quart de disque par l'aire d'une maille :

$$N_{\text{etats}}(E_{\max}) = \frac{\pi k_{\max}^2}{4 \Delta^2 k} = \frac{\pi \times 2mE_{\max}}{\hbar^2 \times 4 \frac{\pi^2}{S}} \quad N_{\text{etats}}(E_{\max}) = \frac{mSE_{\max}}{2\pi\hbar^2} .$$

9. Le niveau de Fermi E_F est tel que $2N_{\text{etats}}(E_F) = N_e$ d'où on déduit, avec $n_s = N_e/S$,

$$E_F = \frac{\pi \hbar^2 n_s}{m}$$

10. $E_F = 7,7 \cdot 10^{-23} \text{ J} = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$

11. La relation proposée rappelle celle de De Broglie, habituellement écrite sous la forme $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, et en projection $m v_y = \hbar k_y$. Ici, $\hbar k_y = m v_y - e x B$ donc $\hbar k$ ne représente pas la quantité de mouvement habituelle : on a en plus le terme $-e x B$.

12. On applique la seconde loi de Newton à l'électron.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \begin{cases} m \dot{v}_x = -e B v_y \\ m \dot{v}_y = e B v_x \end{cases}$$

13. La résolution de ce système peut se faire en utilisant la variable complexe $u = x + iy$. On montre alors que le mouvement est circulaire uniforme avec un rayon et une vitesse angulaires donnés par

$$R = \frac{m|v|}{eB} \quad \omega_0 = \frac{eB}{m} .$$

La pulsation ω se nomme « pulsation cyclotron ». Il n'est pas demandé de refaire ces calculs en détails, et ils ne sont pas indispensables pour obtenir la relation à prouver. En intégrant la projection sur \vec{u}_y on obtient :

$$x = \frac{v_y}{\omega_0} + x_C \quad \text{où} \quad x_C \text{ est une constante.}$$

La constante x_C représente l'abscisse du centre du cercle que décrit l'électron. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre la moyenne terme à terme de cette équation. Pour un mouvement circulaire, $\langle v_y \rangle = 0$ donc on obtient : $\langle x \rangle = x_C$. Ainsi x_C est l'abscisse moyenne et pour une trajectoire circulaire, c'est celle du centre.

14. En rapprochant la relation obtenue ci-dessus de celle portant le numéro (3) dans l'énoncé, on interprète x_0 comme l'abscisse du centre de la trajectoire classique. La condition $x_0 \in [0, \ell_x]$ signifie que le centre de la trajectoire circulaire se trouve dans la zone rectangulaire où le gaz d'électrons est confiné.

15. Dans la première partie, on a vu $k_y = m_y \pi / \ell_y$ donc

$$m_y = \frac{\ell k_y \ell_y}{\pi} = -\frac{eB x_0 \ell_y}{\hbar \pi} .$$

Comme $x_0 \leq \ell_x$, on en déduit

$$|m_y| \leq \frac{eB \ell_x \ell_y}{\hbar \pi} = \frac{eBS}{\hbar \pi} \quad \boxed{m_{\max} = \frac{eBS}{\hbar \pi} = \frac{2eBS}{h}} .$$

16. Avec $\phi(x, y) = \Omega(x) e^{ik_y y}$, on a :

$$\Delta \phi = (\Omega''(x) - k_y^2) e^{ik_y y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = ik_y \Omega e^{ik_y y} .$$

Le membre de gauche de l'équation de Schrödinger s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\Omega'' - k_y^2) e^{ik_y y} - \frac{i\hbar e x B}{m} (ik_y \Omega e^{ik_y y}) + \frac{e^2 B^2 x^2}{2m} \Omega e^{ik_y y}$$

Comme $\frac{eB}{m} = \omega_0$ et comme $\hbar k_y = -m\omega_0 x_0$, cette expression s'écrit :

$$e^{ik_y y} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Omega'' + \frac{m^2 \omega_0^2 x_0^2}{2m} - m\omega_0^2 x_0 x \Omega + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \Omega \right)$$

$$e^{ik_y y} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Omega'' + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x_0^2 - 2x_0 x + x^2) \Omega \right)$$

L'équation de Schrödinger s'écrit donc

$$e^{ik_y y} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Omega'' + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (x - x_0)^2 \Omega \right) = E \Omega e^{ik_y y}$$

c'est-à-dire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Omega}{dx^2} + U_{\text{eff}}(x) \Omega = E \Omega \quad \text{avec} \quad U_{\text{eff}}(x) = K(x - x_0)^2 \quad \text{et} \quad \boxed{K = m\omega_0^2} .$$

17. Habituellement, ce potentiel modélise un oscillateur harmonique de position d'équilibre x_0 , de pulsation propre ω_0 et de raideur K .

18. Chacun des niveaux peut accueillir $2m_{\max}$ électrons, donc $N = 2pm_{\max}$

$$\boxed{N_{\max p} = \frac{4peBS}{h}} .$$

19. Tous les électrons peuvent tenir dans le niveau 1 en respectant le principe d'exclusion de Pauli si

$$N_e \leq N_{\max 1} = \frac{4eBS}{h} \quad \text{c'est-à-dire si} \quad B \geq B_1 \quad \text{avec} \quad \boxed{B_1 = \frac{h n_s}{4e}} .$$

20. De même,

$$N_e \leq N_{\max p} = \frac{4peBS}{h} \quad \text{si} \quad B \geq B_p \quad \text{avec} \quad B_p = \frac{h N_e}{4eSp} = \frac{h n_s}{4p} \quad \boxed{B_p = \frac{B_1}{p}} .$$

21.

$$R_H = \frac{B_p}{ens} = \frac{B_1}{pens} = \boxed{R_H = \frac{h}{4e^2} \times \frac{1}{p}} .$$

On trouve des valeurs quantifiées variant en $\frac{1}{p}$, mais par rapport à la relation (6) de l'énoncé, il apparaît ici le facteur incorrect $1/4$. Le modèle étudié ici permet de se forger une idée de l'effet Hall quantique, ce qui constitue déjà un résultat remarquable, mais il est incomplet.

22. On calcule $B_1 = 2,1 \text{ T}$. L'effet Hall quantique s'observe avec des champs intenses et d'ailleurs, l'énoncé dit que Klitzing travaillait au Service des Champs Intenses ! Sans le facteur 4 incorrect, on obtiendrait même 8 T. Pour p grand, les valeurs de B_p et de R_H tendent vers 0 et deviennent de plus en plus proches les unes des autres, ce qu'on voit d'ailleurs sur le graphe fourni par l'énoncé. La variation de R_H avec B semble presque continue et la quantification n'est plus visible si B tend vers 0.

Mesure de la masse d'un atome de rubidium

Extrait de X-ENS-EPSCI 23

Le problème original commence par des questions portant sur les incertitudes, la notion d'écart normalisé et sur le modèle de Bohr.

4.a L'énergie des électrons passant de E_a à E_i , l'atome absorbe un photon d'énergie $E_i - E_a$.

4.b La vitesse de l'atome passe de $\vec{0}$ à \vec{v}_r . Pour le système formé de l'atome et du photon, la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie s'expriment respectivement par

$$\hbar\vec{k} = m\vec{v}_r \quad \text{et} \quad E_a + \hbar\omega = E_i + \frac{1}{2}mv_r^2 \quad .$$

4.c

$$E_i - E_a = \hbar\omega - \frac{1}{2}mv_r^2 = \hbar ck - \frac{1}{2}m \left(\frac{\hbar k}{m} \right)^2 = \hbar ck \left(1 - \frac{\hbar k}{2mc} \right) = \hbar ck \left(1 - \frac{\hbar\omega}{2mc^2} \right) \quad .$$

La formule proposée par l'énoncé s'obtient en négligeant le second terme dans la parenthèse. Voici deux arguments pour cela. D'abord, $\hbar k/m = v_r$ est la vitesse de recul. Comme on se place dans un cadre non relativiste, on peut affirmer que : $v \ll c$, c'est à dire $\hbar k/(mc) \ll 1$. Ensuite, on peut calculer $mc^2 = 13,5 \cdot 10^{-9} \text{ J}$ et l'énergie des photons est ici d'après la figure 1 de l'ordre de $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Donc $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$.

Ces deux arguments ne sont pas très rigoureux. Dans le premier, on vérifiera ultérieurement que $v_r \ll c$ et dans le second, on a implicitement supposé $E_i - E_a \simeq \hbar\omega$, en admettant en quelque sorte ce qu'on veut démontrer ! À nouveau, c'est un AN a posteriori qui justifiera la validité de l'approximation. En négligeant le second terme de la parenthèse, on obtient

$$k \simeq \frac{E_i - E_a}{\hbar c} \quad v_r = \frac{\hbar k}{m} = \frac{E_i - E_a}{mc} \quad v_r = 7 \cdot 10^{-8} \text{ m.s}^{-1} \quad v_r = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$$

4.d Avec la transition $a \mapsto c$, l'effet de recul est fort et on sépare mieux la fonction d'onde, mais on obtient un atome dans un état de durée de vie très courte et il ne s'y maintiendra pas longtemps. Au contraire, la transition $a \mapsto b$ donne un recul plus faible, sépare moins bien la fonction d'onde, mais produit un atome dans un état de durée de vie très longue.

5. Décomposons le processus en deux étapes. D'abord, l'atome absorbe un photon du premier laser et subit un recul de vitesse \vec{v}_r tel que $\hbar\vec{k} = m\vec{v}_r$. Puis il émet un photon du second laser et sa vitesse passe de \vec{v}_r à \vec{v}'_r . La conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$m\vec{v}_r = m\vec{v}'_r + \hbar\vec{k}_2 \simeq m\vec{v}'_r - \hbar\vec{k} = m\vec{v}'_r - m\vec{v}_r \quad \text{d'où on déduit} \quad \vec{v}'_r = 2\vec{v}_r \quad .$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{E_c - E_a}{\hbar c} = \frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,1 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} \quad k = 1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad .$$

6.a L'équation de Schrödinger dépendant du temps s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad .$$

Cette équation est linéaire ; Ψ en est solution si et seulement si chacun des deux termes en est solution, c'est à dire si

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(a_1\varphi_1) + U(a_1\varphi_1) = -i\hbar\frac{da_1}{dt}\varphi_1 \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(a_2\varphi_2) + U(a_2\varphi_2) = -i\hbar\frac{da_2}{dt}\varphi_2$$

Dans ces expressions, U désigne l'énergie potentielle dont dérive les forces agissant sur l'atome ; il me semble qu'on doit l'identifier à E_p . Selon moi, il ne faut pas y inclure le terme E_a ou le terme E_b qui désigne l'énergie des électrons, mais ce point n'est pas clair dans mon esprit. Avec la forme proposée pour φ , on a

$$\Delta\phi = -\frac{mv_0^2}{\hbar^2}\varphi_1$$

et on obtient après simplification par φ :

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{mv_0^2}{2} + E_{p,a} \right) a_1$$

et de même pour φ_2 :

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(v_0 + 2v_r)^2}{2} + E_{p,a} \right) a_2 \quad .$$

Dans les parenthèses, le premier terme représente l'énergie cinétique et le second l'énergie potentielle. En admettant qu'il faille aussi prendre l'énergie électronique dans U , on obtient finalement

$$\frac{da_1}{dt} = -\frac{iE_1}{\hbar} a_1 \quad \frac{da_2}{dt} = -\frac{iE_2}{\hbar} a_2 \quad .$$

On retrouve ici simplement le calcul vu en cours pour établir l'équation de Schrödinger aux états stationnaires.

6.b Les équations précédentes se résolvent simplement en

$$a_1(t) = a_1(0)e^{-iE_1t/\hbar} \quad a_2(t) = a_2(0)e^{-iE_2t/\hbar} \quad .$$

On peut écrire $\vec{a}(t) = A(t)\vec{a}(0)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{E_1}{\hbar} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{E_2}{\hbar} \quad .$$

6.c Avec l'état initial proposé, on obtient

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1 t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{c'est à dire} \quad \Psi(\vec{r}, t) = e^{-i\omega_1 t} e^{j\frac{m\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad .$$

L'atome reste donc perpétuellement dans l'état 1, est c'est bien le sens d'un état stationnaire. Il en serait de même s'il était initialement dans l'état 2.

Cette question 6 ne fait que reprendre un concept vu en cours : lorsqu'un état initial est une superposition d'états stationnaires, cette superposition évolue dans le temps, chacun des états qui la composent subissant un déphasage $-\omega t$ déterminé par la pulsation E/\hbar qui le concerne.

7.

$$R(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -je^{j\phi_\ell} \\ -je^{-j\phi_\ell} & 1 \end{pmatrix} \quad R(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -je^{j\phi_\ell} \\ -je^{-j\phi_\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

8.a On remarque tout d'abord que $A(0)$ est la matrice identité et donc $A^{-1}(0)$ également. En effectuant les produits matriciels on obtient

$$\vec{a}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-j\omega_1 \tau} \\ -je^{-j(\omega_2 \tau + \phi_\ell)} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \Psi(\vec{r}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega_1 \tau} e^{j\frac{m\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} - \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j(\omega_2 \tau + \phi_\ell)} e^{j\frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r}}{\hbar}}$$

Après l'instant τ , le laser est supprimé l'état évolue comme décrit dans la question 6.b : le vecteur \vec{a} est multiplié par $\vec{a}(t - \tau)$, c'est à dire que les coefficients évoluent exponentiellement avec les facteurs $e^{-i\omega_1(t-\tau)}$ et $e^{-i\omega_2(t-\tau)}$. En effectuant ces multiplications, on fait disparaître les facteurs contenant τ et on obtient

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\omega_1 t} e^{j\frac{m\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{\hbar}} - \frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_\ell} e^{-j\omega_2 t} e^{j\frac{m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r}}{\hbar}} \quad .$$

Avant l'impulsion, l'atome est dans l'état $(1, 0)$, de quantité de mouvement $m\vec{v}_0$. Après l'impulsion, il est dans une superposition des états de quantité de mouvement $m\vec{v}_0$ et $m(\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r)$, avec des coefficients

$$t_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad r_a = -\frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_\ell} \quad .$$

On peut dire que l'état initial a été soit « transmis » (pour rester identique) soit « réfléchi » (vers le nouvel état). On vérifie $|t_a|^2 + |r_a|^2 = 1$: la probabilité totale est unitaire, la transmission et la réflexion constituent un ensemble complet d'événements.

8.b Des calculs analogues donne l'état final

$$\Psi(\vec{r}, t) = r_b e^{-j\omega_1 t} e^{j\frac{m}{\hbar} \vec{v}_0 \cdot \vec{r}} + t_b e^{-j\omega_2 t} e^{j\frac{m}{\hbar} (\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r) \cdot \vec{r}} \quad \text{avec} \quad r_b = -\frac{j}{\sqrt{2}} e^{j\phi_\ell} \quad t_b = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

8.c On calcule

$$A(\tau)R(\pi)A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -je^{-j\omega_1 \tau} e^{j\phi_\ell} \\ -je^{-j\omega_2 \tau} e^{-j\phi_\ell} & 0 \end{pmatrix} .$$

En multipliant par $(1, 0)$ et $(0, 1)$, puis pas $A(t - \tau)$, on obtient respectivement les états de sortie, à l'instant $t > \tau$,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -je^{-j\omega_2 t - j\phi_\ell} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -je^{-j\omega_1 t} e^{j\phi_\ell} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, une particule dans l'état de vitesse \vec{v}_0 est devenue une particule de vitesse $\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r$, et inversement. Une impulsion π fait donc passer 100% de l'état vers un autre état. Il y a une certaine analogie avec un miroir qui, en optique, transforme 100% d'un faisceau incident en un faisceau réfléchi.

9. Notons θ_1 et θ_2 les déphasages des deux ondes le long de leur trajet depuis A , en lien avec le chemin optique qu'elles ont parcouru. Soit s_0 le scalaire optique incident en A . Les scalaires optiques produits par les deux voies de l'interféromètre sont

$$s_1 = r_0 r_0 t_0 e^{j\theta_1} s_0 \quad s_2 = t_0 r_0 r_0 e^{j\theta_2} s_0 .$$

Ces deux faisceaux sont issus de la même source, ils sont cohérents et interfèrent pour donner

$$s = s_1 + s_2 = t_0 r_0^2 (e^{j\theta_1} + e^{j\theta_2}) .$$

L'intensité lumineuse est

$$I = \frac{1}{2} s s^* = \frac{1}{2} s_0 s_0^* |r_0|^4 |t_0|^2 [1 + \cos(\theta_2 - \theta_1)] .$$

Les deux chemins optiques ne diffèrent que par la traversée du verre : leur différence de marche est $\delta = (n-1)\ell$ et leur déphasage

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1)\ell .$$

Finalement,

$$I = I_0 |r_0|^4 |t_0|^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1)\ell\right) \right] .$$

On appliquant la formule de Fresnel, on peut presque écrire directement ce résultat, mais le raisonnement aide à comprendre la suite du problème.

Si ℓ change, l'intensité varie, on a une variation d'ordre correspondant à un défilement de franges.

10. Sur le trajet $ABCD$ ont lieu les processus suivants :

$$\vec{v}_0 \xrightarrow{r_a} \vec{v}_0 + 2\vec{v}_r \xrightarrow{t_b} \vec{v}_0 + 2\vec{v}_r \xrightarrow{r_b} \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} \xrightarrow{t_a} \vec{v}_0$$

En sortie, on obtient donc l'état

$$\Psi_I = \Psi_0 e^{j\Phi_I} r_a t_b r_b t_a = \Psi_0 e^{j\Phi_I} \left(-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{-j\phi_\ell(0)} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{j}{\sqrt{2}} e^{+j\phi_\ell(2T)} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4} \Psi_0 e^{j(\Phi_I - \phi_\ell(0) + \phi_\ell(2T))} .$$

Il faut prendre garde au fait que ϕ_ℓ dépend du temps et qu'il faut l'évaluer à $t = 0$ pour la réflexion en A et à $t = 2T$ pour la réflexion en C . En examinant le trajet 2, les réflexions ont lieu à $t = T$ et $t = 3T$ et on trouve de manière analogue

$$\Psi_{II} = -\frac{1}{4} \Psi_0 e^{j(\Phi_{II} - \phi_\ell(T) + \phi_\ell(3T))} .$$

En sortie, on a une superposition de ces deux états : $\Psi = \Psi_I + \Psi_{II}$. La densité de probabilité se calcule par $P = \Psi\Psi^*$ et un calcul analogue à celui conduit en optique pour démontrer la formule de Fresnel donne

$$P = \frac{1}{8} |\Psi_0|^2 [1 + \cos(\Phi_{II} - \Phi_I + \phi_\ell(0) - \phi_\ell(T) - \phi_\ell(2T) + \phi_\ell(3T))] .$$

Je n'obtiens pas les mêmes signes que dans l'énoncé. Il faut remplacer Φ_{II} et Φ_I par leurs opposés, et c'est acceptable car l'énoncé n'est pas explicite sur la convention de signe choisie pour ces deux phases. À ce détail près, on trouve l'expression proposée par l'énoncé pour $\gamma = 1$. Ce paramètre γ est un facteur de contraste et en pratique, il est inférieur à 1 comme le signal l'énoncé un peu plus loin.

11. La frange centrale et la première « frange brillante » à sa droite correspondent respectivement à

$$\Delta\Phi + \Delta\phi_{\ell, \text{centre}} = 0 \quad \Delta\Phi + \Delta\phi_{\ell, 1} = 2\pi \quad .$$

On a donc :

$$\Delta\phi_{\ell, 1} - \Delta\phi_{\ell, \text{centre}} = 2\pi \quad \text{c'est à dire} \quad 2\pi T(\delta_{\ell, 1} - \delta_{\ell, \text{centre}}) = 2\pi \quad T = \frac{1}{\delta_{\ell, 1} - \delta_{\ell, \text{centre}}} \quad .$$

On peut aussi remarquer que P varie comme $\cos(\Delta\Phi + 2\pi\delta_{\ell}T)$ et présente donc, vis à vis de δ_{ℓ} , un comportement $1/T$ périodique. On lit sur la figure 5 : $\delta_{\ell, \text{centre}} - \delta_{\ell, 1} = -362 + 412 = 50 \text{ Hz}$ et on en déduit

$$T = 0,02 \text{ s} \quad .$$

12.a La portion de chemin qu'un atome parcourt dans l'état a (durée T_a) et celle qu'il parcourt dans l'état b (durée T_b) contribuent à la phase avec des termes respectifs

$$\int_{T_a} (E_a + E_{p,a}) dt = (E_a + E_{p,a})T_a \quad \int_{T_b} (E_b + E_{p,b}) dt = (E_b + E_{p,b})T_b \quad .$$

Sur chacun des deux trajets $ABCD$ et $A'B'C'D'$, les atomes sont dans l'état a pendant une durée $T_a = T$ et dans l'état b dans une durée $T_b = 2T$. Les intégrales précédentes ont donc la même valeur sur les deux voies.

12.b Dans l'expression de Φ_c , il suffit de prendre en compte dans E le terme d'énergie cinétique $mv^2/2$.

$$\int mv^2 dt - \int \frac{1}{2}mv^2 dt = - \int \frac{1}{2}mv^2 dt \quad .$$

Donc

$$\Delta\Phi = \frac{m}{2\hbar} \left(\int_{A'B'C'D'} v_{II}^2 dt - \int_{ABCD} v_I^2 dt \right) = \frac{m}{2\hbar} \int_0^{3T} (v_{II}^2 - v_I^2) dt = \int_0^{3T} (v_{II} - v_I) \left(\frac{v_{II} + v_I}{2} \right) dt \quad .$$

12.c En exploitant la figure 4, on détermine les valeurs ci-dessous.

	$\vec{v}_{II} - \vec{v}_I$	$(\vec{v}_{II} + \vec{v}_I)/2$
$[0, T]$	$-2\vec{v}_r$	$\vec{v}_0 + \vec{v}_r$
$[T, 2T]$	$\vec{0}$	$\vec{v}_0 + 2\vec{v}_r + \Delta\vec{v}$
$[2T, 3T]$	$2\vec{v}_r$	$\vec{v}_0 + \vec{v}_r + \Delta\vec{v}$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{m}{\hbar} \int_0^T -2\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_r) dt + \frac{m}{\hbar} \int_T^{2T} 0 dt + \frac{m}{\hbar} \int_{2T}^{3T} 2\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_r + \Delta\vec{v}) dt \\ &= \frac{m}{\hbar} [-2T\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_r) + 2T\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_r + \Delta\vec{v})] \\ &= \frac{m}{\hbar} 2T\vec{v}_r \cdot \Delta\vec{v} \end{aligned}$$

D'après la question 4, $\vec{k} = m\vec{v}_r/\hbar$ et donc

$$\Delta\Phi = 2T\vec{k} \cdot \Delta\vec{v} \quad .$$

13.a La frange centrale est définie par $\Delta\Phi + \Delta\phi_{\ell} = 0$ c'est à dire par

$$2T\vec{k} \cdot \Delta\vec{v} + 2\pi T\delta_{\ell}^* = 0 \quad \delta_{\ell}^* = -\frac{1}{\pi}\vec{k} \cdot \Delta\vec{v} = -\frac{1}{\pi}\vec{k} \cdot 2N\frac{\hbar\vec{k}}{m} \quad \boxed{\delta_{\ell}^* = -\frac{2Nk^2\hbar}{m\pi}} \quad .$$

13.b

$$N = -\frac{m\pi\delta_{\ell}^*}{2\hbar k^2} = -\frac{1,5 \cdot 10^{25} \times 3 \times (-1,6 \cdot 10^7)}{2 \times 1,10^{-34} \times (1,10^7)^2} \quad N = 3 \cdot 10^2 \quad .$$

13.c Le but des manipulations est de mesurer m qu'on obtient par

$$m = -\frac{2N\hbar k^2}{\delta_\ell^*} .$$

Supposons N parfaitement connu ; les incertitudes portent uniquement sur k et f . Le paramètre k est élevé au carré et pour cette raison, un facteur 2 intervient dans le calcul de propagation d'incertitudes ci-dessous. Remarquons qu'en toute rigueur, ce calcul est hors programme puisqu'on doit se limiter à des sommes, produits et quotients. On peut donc pardonner l'oubli de ce facteur 2.

$$\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 = \left(\frac{u(\delta_\ell^*)}{\delta_\ell^*}\right)^2 + \left(2\frac{u(k)}{k}\right)^2$$

Comme $k = 2\pi f/c$,

$$\left(\frac{u(k)}{k}\right) = \frac{u(f)}{f} = \frac{10^2}{5.10^{14}} = 2.10^{-12} \quad \left(\frac{u(k)}{k}\right)^2 = 4.10^{-24}$$

$$\text{à comparer à} \quad \left(\frac{u(\delta_\ell^*)}{\delta_\ell^*}\right)^2 = \left(\frac{47}{1,6.10^{11}}\right)^2 = 9.10^{-20}$$

On a calculé $f = (E_c - E_a)/h$ et la valeur de $u(\delta_\ell^*)$ est donnée après la question 10. On voit que l'incertitude sur la fréquence est négligeable et finalement,

$$\frac{u(m)}{m} \simeq \frac{u(\delta_\ell^*)}{\delta_\ell^*} .$$