

Dynamique des tourbillons (X PC 18)

1) Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
à comparer à $\text{rot } \vec{u} = \vec{\omega}$

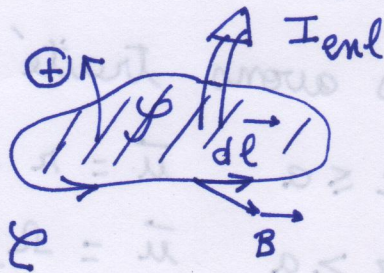
Comme l'analogie de $\vec{\omega}$ est $\mu_0 \vec{j}$, l'analogie de \vec{u} est \vec{B} .

2) L'équation de Maxwell $\text{div } \vec{B} = 0$ a pour analogie $\text{div } \vec{u} = 0$. Elle est ici vérifiée car le fluide est incompressible.

3) Soit \mathcal{C} une courbe fermée orientée. Le théorème d'Ampère affirme : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$.

I_{enl} , nommée intensité enlacée, désigne l'intensité des courants traversant une surface \mathcal{S} quelconque s'appuyant sur \mathcal{C} , algébrisée en accord avec l'orientation de \mathcal{C} selon la règle de la main droite.

$$I_{\text{enl}} = \int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



Dans le problème fluide,

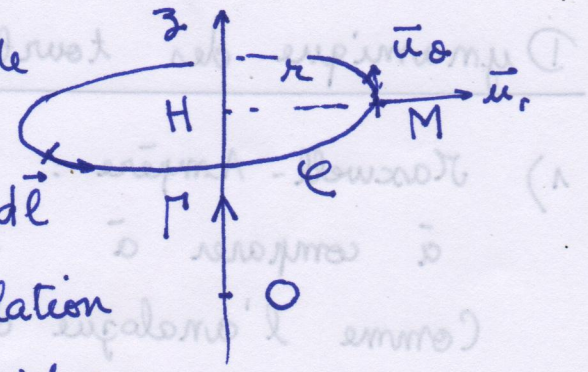
on a : $\oint_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \Gamma \quad (A)$

4) Si \vec{x} appartient à un plan de symétrie de la vorticité, $\vec{u}(\vec{x})$ est orthogonal à ce plan.

Si \vec{x} appartient à un plan d'antisymétrie de la vorticité, $\vec{u}(\vec{x})$ appartient à ce plan.

2

5) Le plan $(M, \bar{u}_r, \bar{u}_z)$ est plan de symétrie de la vorticité donc



$$\bar{u}(M) = u(r, \theta, z) \bar{u}_\theta$$

  cause des invariances par translation et rotation, B ne dépend ni de θ ni de z .

En appliquant la relation (A) avec pour \mathcal{C} un cercle de centre H , de rayon r et inclus dans le plan

$(H, M, \bar{u}_r, \bar{u}_\theta)$, on obtient:

$$\int_{\mathcal{C}} u(r) \bar{u}_\theta \cdot d\bar{l} \bar{u}_\theta = \Gamma$$

$$2\pi r u(r) = \Gamma \quad u(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

6) Nous avons traité cette question en cours.

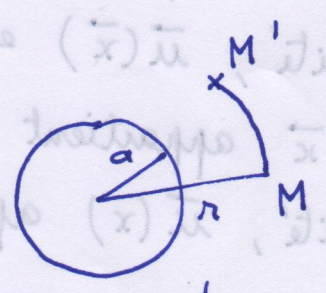
$$\begin{aligned} r \leq a & \quad \bar{u} = r \Omega \bar{u}_\theta \\ r \geq a & \quad \bar{u} = \Omega \frac{a^2}{r} \bar{u}_\theta \end{aligned}$$

7) Comme \bar{u} est colinéaire à \bar{u}_θ , les particules fluides se déplacent à vitesse constante en parcourant des cercles.

Soit une particule fluide située en M   t et située en M'   $t' \geq t$. La propriété d'advection s'exprime par

$$\bar{\omega}(M', t') = \bar{\omega}(M, t)$$

• si $r > a$, $\bar{\omega}(M, t) = \vec{0}$ et donc $\bar{\omega}(M', t') = \vec{0}$.



  l'instant t , la vorticité était nulle en M' .

L'advection de M vers M' n'a donc pas modifié sa valeur. ³

• si $r \leq a$, $\bar{\omega}(M, t) = \bar{\Omega}$ et donc $\bar{\omega}(M', t') = \bar{\Omega}$.

À l'instant t , la vorticité en M' valait déjà $\bar{\Omega}$.

Donc l'advection n'a pas modifié sa valeur.

En conclusion, l'advection de vorticité ne modifie en aucun point cette vorticité. Cela résulte du fait que les particules fluides décrivent des cercles et que le champ de vorticité est invariant par rotation.

On peut donner une démonstration plus formelle.

L'advection s'exprime par $\frac{D\bar{\omega}}{Dt} = 0$. Cela s'écrit encore

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{\omega} = \vec{0}. \quad \text{Comme } \bar{u} = u \vec{e}_\theta \text{ et } \bar{\omega} = \omega \vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + u \times \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \vec{e}_z = \vec{0}$$

donc $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = \vec{0}$: la vorticité n'évolue pas.

8) Selon le résultat

de la question 5,

la vitesse créée

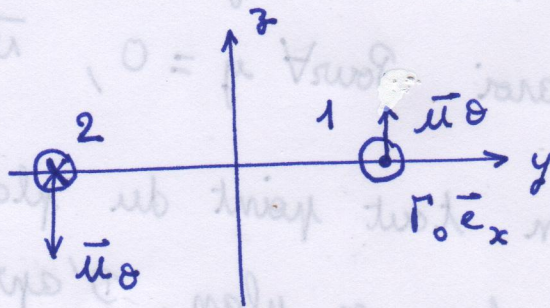
par la ligne 1 sur

la ligne 2 est

$$\vec{v}_{1/2} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad \text{avec } r = l$$

et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_z$

$$\vec{v}_{1/2} = \frac{-\Gamma_0}{2\pi l} \vec{u}_z$$



4 De même, la vitesse créée par la ligne sur la ligne est

$$\vec{v}_{2/1} = \frac{-\Gamma_0}{2\pi l} \vec{u}_3 \quad \text{avec ici } \vec{u}_0 = \vec{u}_3$$

$$\vec{v}_{2/1} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi l} \vec{u}_3$$

On constate que : $\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_{2/1}$

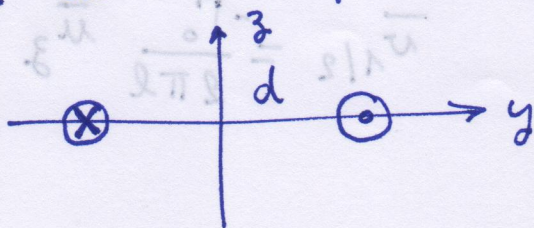
On sait que chacune des lignes ne se déplace pas sous l'effet du champ de vitesse qu'elle engendre. Par contre, elle est advectée par le champ de vitesse que l'autre ligne crée. La ligne 1 se déplace donc à la vitesse $\vec{v}_{2/1}$ et la ligne 2 se déplace à la vitesse $\vec{v}_{1/2}$.

Les deux lignes se déplacent donc selon un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $-\frac{\Gamma_0}{2\pi l} \vec{u}_3$, leur position relative restant inchangée.

9) La vitesse du fluide parfait doit être tangente à la paroi. Pour $y=0$, $\vec{u} \cdot \vec{e}_y = 0$

10) En tout point du plan ($y=0$), \vec{u} doit être inclus dans ce plan. D'après 4, c'est le cas si ce plan est un plan d'antisymétrie de la vorticité.

La ligne fictive doit donc porter la circulation $-\Gamma_0 \vec{e}_x$.



La ligne réelle d'ordonnée ($y = d$) se comporte donc comme la ligne 1 d'ordonnée $\frac{l}{2}$ de la question 8. Elle se déplace de manière rectiligne uniforme à la

vitesse $\frac{-\Gamma_0}{2\pi l} \vec{e}_z$ avec $l = 2d$. $\vec{v} = \frac{-\Gamma_0}{4\pi d} \vec{e}_z$

11) Le plan $(0yz)$ est un plan de symétrie de l'anneau de vorticité donc en tout point de ce plan, \vec{u} est colineaire à \vec{e}_x .   cause de l'invariance par rotation autour de $(0, \vec{e}_x)$, il a la même valeur en tout point de l'anneau: $\vec{u} = V \vec{e}_x$.

D'après la propriété d'advection, l'anneau se déplace à la vitesse $V \vec{e}_x$ sous l'effet de son propre champ de vitesse.

12) $[\Gamma] = L^2 T^{-1}$ $[R] = L$ $[V] = L T^{-1}$

$[R^\alpha \Gamma^\beta] = L^{\alpha+2\beta} T^{-\beta}$ $V = C \frac{\Gamma}{R}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ -\beta = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

13) Pour les 3 derniers points, on mesure un déplacement de 0,33 cm en 0,42 s d'où la vitesse

$v = \frac{0,33}{0,42} = 0,78 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

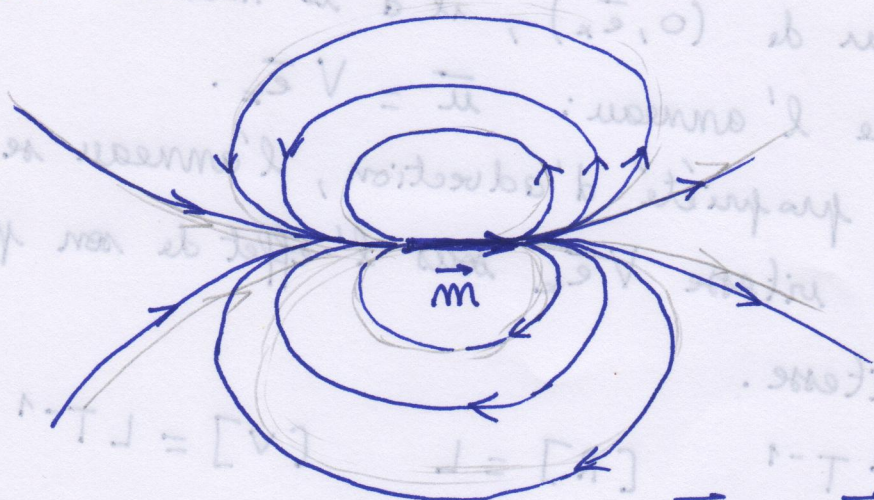
D'après 10, $v = \frac{|\Gamma_0|}{4\pi d}$ avec ici $d = 0,31 \text{ cm}$.

$|\Gamma| = 4\pi d v$ donne $|\Gamma| = 3,1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

6
 14) Pour la chute verticale, on déduit de la figure la vitesse $V = 1,3 \text{ cm s}^{-1}$ et on mesure $R = 0,58 \text{ cm}$.

$$C = \frac{VR}{\Gamma} = 0,25$$

15) Le champ produit par le dipôle est invariant par rotation autour de $(0, \vec{e}_x)$ donc on peut se limiter à une représentation des lignes de champ dans le plan $(0, x, z)$. Leur allure est bien connue.



Pour des courants électriques, $\vec{\mathcal{J}} = i \vec{S}$.

Pour l'anneau de vortécité, $\vec{m} = \Gamma \pi R^2 \vec{e}_x$

16) Pour $\theta = 0$ et $\vec{e}_r = \vec{e}_x$, de même que pour $\theta = \pi$ et $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$, on obtient en remplaçant π par L dans l'expression (4):

$$\vec{u} = \frac{2m}{4\pi L^3} \vec{e}_x = \frac{2 \times \Gamma \pi R^2}{4\pi L^3} \vec{e}_x$$

$$\vec{u} = \frac{\Gamma R^2}{2L^3} \vec{e}_x$$

17) On utilise le résultat de la question 16 en remplaçant L par ξ .

$$\vec{u}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\Gamma_1 R_1^2}{2 \xi^3} \vec{e}_x \quad \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\Gamma_2 R_2^2}{2 \xi^3} \vec{e}_x$$

18) La vitesse d'autopropulsion est de la forme $C \frac{\Gamma}{R}$.
L'advection des deux anneaux par le champ de vitesse donne les équations suivantes.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_{2 \rightarrow 1} + C \frac{\Gamma_1}{R} \\ \dot{x}_2 = u_{1 \rightarrow 2} + C \frac{\Gamma_2}{R} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\Gamma_2 R_2^2}{2 (x_2 - x_1)^3} + C \frac{\Gamma_1}{R_1} \\ \dot{x}_2 = \frac{\Gamma_1 R_1^2}{2 (x_2 - x_1)^3} + C \frac{\Gamma_2}{R_2} \end{cases}$$

Comme $\xi = x_2 - x_1$, on obtient par soustraction membre à membre :

$$\dot{\xi} = \frac{1}{2 \xi^3} (\Gamma_1 R_1^2 - \Gamma_2 R_2^2) + C \left(\frac{\Gamma_2}{R_2} - \frac{\Gamma_1}{R_1} \right)$$

19) $\frac{\Gamma_2}{R_2} - \frac{\Gamma_1}{R_1} = \varepsilon \frac{\Gamma_1}{R_1}$ $\Gamma_2 R_2^2 - \Gamma_1 R_1^2 = \delta \Gamma_1 R_1^2$

$$\dot{\xi} = - \frac{\delta \Gamma_1 R_1^2}{2 \xi^3} + C \frac{\Gamma_1}{R_1} \varepsilon$$

Les deux anneaux s'éloignent si $\dot{\xi} > 0$ et ils se rapprochent si $\dot{\xi} < 0$.

$$\dot{\xi} > 0 \iff \left(C \frac{\Gamma_1}{R_1} \varepsilon - \frac{\delta \Gamma_1 R_1^2}{2 \xi^3} \right) > 0 \iff \xi > \frac{\delta R_1^3}{2 \varepsilon C}$$

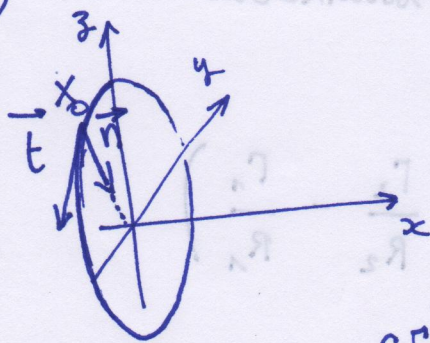
La valeur critique est donc $\xi_c = \left(\frac{\delta R_1^3}{2 \epsilon C} \right)^{1/3}$ (F1)

20) Les anneaux se rapprochent si $\xi_0 < \xi_c$.

Dès lors, ξ décroît et reste inférieur à ξ_c de sorte que le rapprochement se poursuit.

Cependant, le champ dipolaire de la relation (4) utilisé dans ce modèle n'est valable qu'à grande distance donc le modèle ne peut pas s'appliquer à la collision, situation dans laquelle les deux anneaux sont très proches l'un de l'autre.

21)



Le cercle tangent à la courbe se confond avec l'anneau et le rayon de courbure R avec R .

$$\vec{t} \wedge \vec{n} = \vec{e}_x$$

$$C \Gamma \frac{\vec{t} \wedge \vec{n}}{R} = \frac{C \Gamma}{R} \vec{e}_x$$

On retrouve la vitesse des questions 11 et 12.

22) Comme la vorticité est advectionnée par les particules fluides, la vitesse de \vec{X} est égale à \vec{u} .

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial Y / \partial t \\ \partial Z / \partial t \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = C \Gamma_0 \vec{t} \wedge \vec{n} = C \Gamma_0 \vec{e}_x \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{x^1} Y \\ \partial_{x^1} Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = C \Gamma_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_{x^1} Z \\ \partial_{x^1} Y \end{pmatrix}$$

La relation $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{u}$ s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} = -c \Gamma_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & (9) \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = c \Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} & (10) \end{cases}$$

23) En reportant dans les équations (9) et (10) la solution en onde plane (11), on obtient

$$\begin{cases} i\omega Y_0 = c \Gamma_0 k^2 Z_0 & (9) \\ i\omega Z_0 = -c \Gamma_0 k^2 Y_0 & (10) \end{cases}$$

Par produit membre à membre et après simplification par $Y_0 Z_0$, on obtient

$$\omega^2 = c^2 \Gamma_0^2 k^4 \quad \omega = \pm c \Gamma_0 k^2$$

$v_g = \left| \frac{\omega}{k} \right|$ dépend de k
donc ces ondes sont dispersives.



Rem La simplification par $Y_0 Z_0$ est critiquable car ce facteur peut s'annuler. Pour plus de rigueur, on peut écrire le système S sous forme matricielle $(A) \begin{pmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = 0$ avec $\begin{pmatrix} Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis remarquer que cette égalité impose $\det(A) = 0$.

24) $Z_0 = \frac{i \Gamma_0 k^2 Y_0}{\omega}$ avec $\omega = \pm C \Gamma_0 k^2$

$Z_0 = \pm i Y_0$ (.) On suppose $k > 0$.

Choisissons $Y_0 \in \mathbb{R}$, $Z_0 = i Y_0$, $\omega > 0$

$$\begin{cases} Y = \text{Re} (Y_0 e^{i(ut - kx)}) = Y_0 \cos(ut - kx) \\ Z = \text{Re} (i Y_0 e^{i(ut - kx)}) = -Y_0 \sin(ut - kx) \end{cases}$$

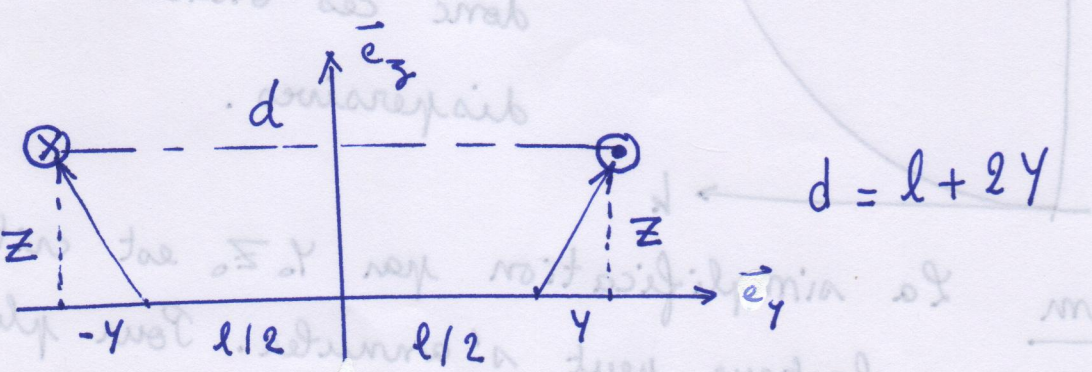
L'onde est polarisée circulairement droite.

Pour $Z_0 = -i Y_0$, $Z = + Z_0 \sin(ut - kx)$ mais comme $\omega < 0$, on a toujours une PCD. *Mais l'onde va dans l'autre sens : PCG!*

La ligne de vorticité a la forme d'une hélice.

25) La linéarisation repose sur l'idée que la ligne de vorticité est peu courb e, ce qui est valable si $|Y|$ et $|Z|$ sont très inférieurs à la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.

26)



27) En utilisant le résultat de la question 8,

on obtient $\vec{u}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi d} \vec{u}_z$ i.e. $\vec{u}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{\Gamma_0}{2\pi(l+2Y)} \vec{u}_z$

$$28) \vec{u}_{2 \rightarrow 1} = \frac{-\Gamma_0}{2\pi l (1 + \frac{2Y}{l})} \vec{e}_z \approx \frac{-\Gamma_0}{2\pi l} (1 - \frac{2Y}{l}) \vec{e}_z$$

L'équation d'advection s'écrit pour la ligne 1:

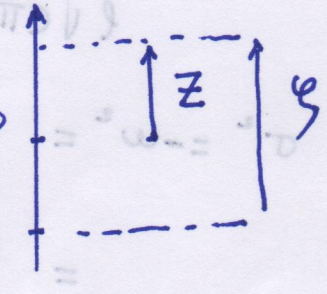
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial t} \\ \frac{\partial Z}{\partial t} \end{pmatrix} = \vec{u}_{11} + \vec{u}_{21} = \begin{pmatrix} -c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Gamma_0}{2\pi l} (1 - \frac{2Y}{l}) \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} = -c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\Gamma_0}{2\pi l} + \frac{\Gamma_0 Y}{\pi l^2} \end{cases} \quad (14)$$

$$29) \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\Gamma_0}{2\pi l} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Donc Y et ξ sont solutions de :

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} = -\Gamma_0 c \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = c\Gamma_0 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\Gamma_0}{\pi l^2} Y - \frac{\Gamma_0}{2\pi l} \end{cases}$$



Poser $\xi = Z + \frac{\Gamma_0}{2\pi l} t$ revient à mesurer la cote d'un point de la ligne par rapport à une origine mobile, de cote $Z_0 = -\frac{\Gamma_0}{2\pi l} t$ se déplaçant à la vitesse

$-\frac{\Gamma_0}{2\pi l} \vec{e}_z$. D'après la question 8, c'est la vitesse à laquelle se déplaceraient les lignes si elles n'étaient pas déformées.

30) En reportant (15) dans (13) et (14), on obtient

$$\begin{cases} i\omega \gamma_0 = c \Gamma_0 k^2 \xi_0 \\ i\omega \xi_0 = -c \Gamma_0 k^2 \gamma_0 + \frac{\Gamma_0}{\pi l^2} \gamma_0 \end{cases}$$

Par produit membre à membre on obtient

$$\omega^2 = c \Gamma_0 k^2 \left(c \Gamma_0 k^2 - \frac{\Gamma_0}{\pi l^2} \right).$$

Si $k < \frac{1}{l} \frac{1}{\sqrt{c\pi}}$, $\omega^2 < 0$ donc $\omega \in i\mathbb{R}$.

Posons dans $\omega = -i\sigma$. Alors $e^{i\omega t} = e^{-\sigma t}$ de sorte que l'amplitude varie exponentiellement; elle croît si $\text{Im}(\omega) < 0$.

31) $k < \frac{1}{l} \frac{1}{\sqrt{c\pi}}$ si $\lambda > \lambda_c$ avec $\lambda_c = 2\pi l \sqrt{\pi c}$

$$\begin{aligned} 32) \quad \sigma^2 = -\omega^2 &= c \Gamma_0^2 k^2 \left(\frac{1}{\pi l^2} - c k^2 \right) \\ &= c \Gamma_0^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \times \frac{1}{\pi l^2} \left(1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} c \pi l^2 \right) \\ &= 4\pi c \frac{\Gamma_0^2}{\lambda^2 l^2} \left(1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2} \right) \end{aligned}$$

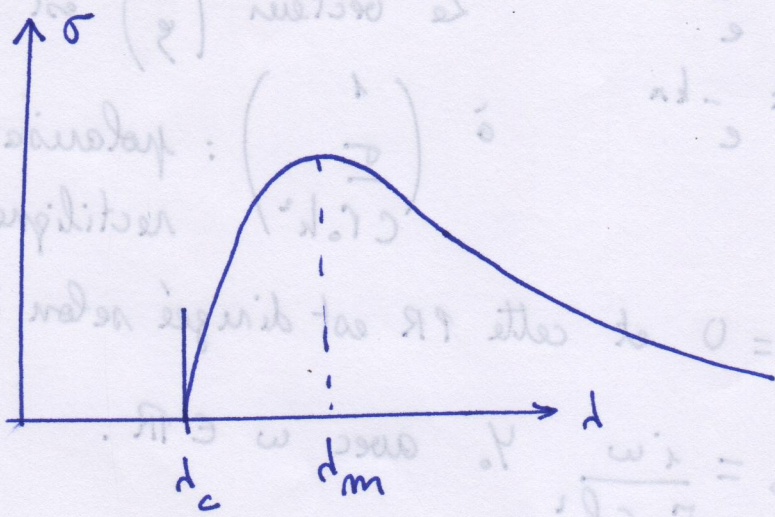
$$\boxed{\sigma = 2\sqrt{\pi c} \frac{\Gamma_0}{\lambda l} \sqrt{1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}}}$$

33) On étudie la fonction

$$f: [\lambda_c, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}}$$

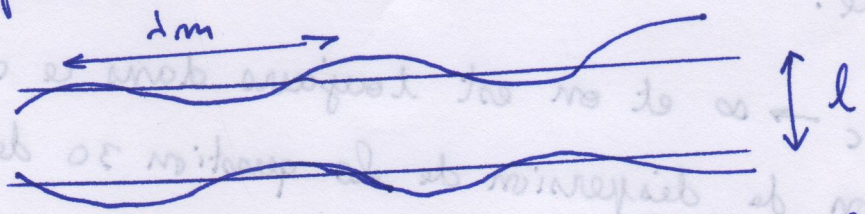
Sa dérivée s'annule pour $\lambda = \lambda_m = \sqrt{2}\lambda_c$.



34) $\lambda_c = 2\pi^{3/2} \sqrt{c} l = 5,6 l$

$\lambda_m = 7,9 l$

Comme la figure est dépourvue d'échelle, on ne peut pas évaluer numériquement λ_m mais seulement le rapport λ_m/l . Les oscillations de longueur d'onde λ_m sont les plus amplifiées donc ce sont elles qui apparaissent.



Je mesure $\frac{\lambda_m}{l} = 7$, compatible avec la valeur ci-dessus, compte-tenu de l'imprécision dans l'exploitation de l'image.

35)

• si $\lambda > \lambda_c$, $\omega = -i\sigma$ $\sigma \in \mathbb{R}^+$

$i\omega \psi_0 = c \Gamma_0 k^2 \psi_0$ donc $\psi_0 = \frac{\sigma}{\Gamma_0 c k^2} \psi_0$

$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma}{\Gamma_0 c k^2} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} Y = Y_0 e^{\sigma t} e^{-kx} \\ Z = \frac{\sigma}{\Gamma_0 c k^2} Y_0 e^{\sigma t} e^{-kx} \end{cases}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est colinéaire

à $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma}{c \Gamma_0 k^2} \end{pmatrix}$: polarisation rectiligne

• pour $l = l_c$, $\sigma = 0$ et cette PR est dirigée selon \vec{e}_y .

• pour $l < l_c$, $Y_0 = \frac{i\omega}{\Gamma_0 c k^2} Y_0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} Y = Y_0 \cos(\omega t - kx) \\ Z = -\frac{\omega Y_0}{\Gamma_0 c k^2} \sin(\omega t - kx) \end{cases}$$

polarisation elliptique droite

Puisque les deux lignes sont l'image d'une de l'autre dans un miroir, la ligne 2 possède une polarisation elliptique gauche.

Si $l \rightarrow \infty$, $l_c \rightarrow \infty$ et on est toujours dans ce cas de PE. La relation de dispersion de la question 30 devient

$\omega^2 = (c \Gamma_0 k^2)^2$ donc $\omega = \pm c \Gamma_0 k^2$ et

$Z \simeq \mp Y_0 \sin(\omega t - kx)$.

On retrouve la polarisation circulaire de la question 24.

Les deux lignes de vorticité sont très éloignées et leur couplage ne se fait plus ressentir.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma}{c \Gamma_0 k^2} \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} -Y \\ -Z \end{pmatrix}$$