

Mathématiques — préparation à l'oral
Nombres complexes, polynômes

Exercice 1. Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles les points $M(z), A(1), N(1+z^2)$ sont alignés. A108-24

Exercice 2. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)^2$. A006-17

Exercice 3. On pose $P = X^3 - (2+i)X^2 + 3X + i - 2$. Montrer que P possède une racine réelle puis factoriser P sur \mathbb{C} . 1611-24

Exercice 4. Le polynôme $X^4 + 4$ est-il irréductible sur \mathbb{R} ? 1612-24

Exercice 5. On pose $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Vérifier que j est une racine multiple de P puis factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$. 1607-26

Exercice 6. Soit un entier $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$ et $P = (X+1)(X^2+1) \cdots (X^n+1)$. Calculer $P(\omega)$. 0306-16

Exercice 7. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{n}{4k}$. 0463-16

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 8. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. A083-24

On se donne une famille libre $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E et on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par \mathcal{B} .

On considère un supplémentaire G de F dans E et on prend un vecteur a de G . On pose alors

$$F_a = \text{Vect}(a + b_1, \dots, a + b_n).$$

Montrer que F_a et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel complexe. On prend des vecteurs v_1, \dots, v_n de E . 0356-14

Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,1}v_1 + \cdots + a_{i,n}v_n = 0_E.$$

Montrer que les vecteurs v_1, \dots, v_n sont nuls.

Exercice 10. Soient z_0, \dots, z_n des nombres complexes tous distincts. Montrer que la famille $((X - z_k)^n)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. 0669-17

Exercice 11. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. S001-22

a. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de f .

Montrer que f est un multiple de Id_E .

b. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f commute avec tous les endomorphismes de E .

Montrer que f est un multiple de Id_E .

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n . Soient u et v deux endomorphismes de E . A014-23

1. Prouver la majoration $\text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

2. On suppose que $u \circ v$ est nul et que $u+v$ est bijectif.

Prouver les égalités $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = n$ et $\text{Im}(v) = \text{Ker}(u)$.

Exercice 13. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E . 0977-26

Montrer que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $q \circ p = p \circ q = q$.

Exercice 14. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

S001-26

a. On suppose que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, la matrice $E_{i,j}$ appartient à H . Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

b. On suppose qu'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ pour lequel $E_{i,j}$ n'appartient pas à H . On fixe un tel (i, j) et on considère le plan $P = \text{Vect}(I_n, E_{i,j})$.

Minorer la dimension de $P \cap H$ et en déduire que H contient au moins une matrice inversible.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n .

A017-17

1. Si f est un projecteur, quel est le lien entre $\text{rg}(f)$ et $\text{tr}(f)$?

2. Si $\text{rg}(f) = \text{tr}(f) = 1$, montrer que f est un projecteur.

Exercice 16. On fixe un entier $n \geq 1$. On note ϕ l'endomorphisme $P \mapsto P - P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

A017-24

On note N la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note \mathcal{E} la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et on note M la matrice de ϕ dans cette base.

1. Déterminer la matrice M .

2. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

3. Montrer que les matrices M et N sont semblables.

4. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

4.1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P - P' = Q$.

4.2. Montrer que si la fonction Q est positive sur \mathbb{R} , alors la fonction P l'est aussi.

4.3. Exprimer P en fonction de Q et de ses dérivées.

Matrices

Exercice 17. On fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on pose $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & a \\ c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$.

A015-24

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$.

1. Trouver un nombre réel θ tel que $M^3 = -\theta M$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $M^{2n} = (-\theta)^{n-1} M^2$.

3. Montrer que la suite de matrices $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée S_∞ .

4. Trouver deux nombres réels α et β tels que $S_\infty = I_3 + \alpha M + \beta M^2$.

Exercice 18. Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que AB est une matrice de projection.
2. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 19. Soit un entier $n \geq 3$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où le bloc B est inversible.

On explicitera B et la matrice de passage.

Question bonus. Résoudre l'équation $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 20. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que l'inversibilité de la matrice $A + Y \times X^T$ équivaut à $X^T \times A^{-1} \times Y \neq -1$.

Exercice 21. Trouver tous les couples (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les égalités $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. On suppose que $A^2 = 0$ et $\text{rg}(A) = 2$.

Montrer que $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$ puis que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminant

Exercice 23. On considère la matrice

$$M_n = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & \ddots & & \vdots \\ b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(M_n)$.

Exercice 24. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note ses colonnes A_1, \dots, A_n . Pour tout indice j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$B_j = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} A_k.$$

On note B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont B_1, \dots, B_n . Exprimer le déterminant de la matrice B en fonction de celui de la matrice A .

Exercice 25. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n -uplet d'éléments deux à deux distincts.

0545-16

a. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(a_k) = 1 + (a_k)^n.$$

b. On considère la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j} = 1 + (a_i)^j$. Calculer son déterminant.

Réduction

Exercice 26. À quelle condition sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

1359-26

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = P'$.

A051-24

On définit également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad g(X^k) = X^{n-k}.$$

Enfin, on note \mathcal{B} la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Donner la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
2. Montrer que f admet 0 pour unique valeur propre et que f n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $g^{-1} = g$.
4. On pose $h = g^{-1} \circ f \circ g$. Montrer que h n'est pas diagonalisable.
5. On pose $u = h + f$. Trouver deux éléments a et b de \mathbb{R} tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad u(P) = aXP + b(X^2 - 1)P'.$$

6. Trouver la matrice de u relativement à la base \mathcal{B} .
7. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = (X - 1)^k(X + 1)^{n-k}$. Calculer $u(P_k)$. En déduire $\det(u)$.

Exercice 28. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.

A021-24

On considère l'endomorphisme $\varphi : h \mapsto g \circ h - h \circ g$ de $\mathcal{L}(E)$.

1. Calculer le déterminant de φ .
2. Soit λ une éventuelle valeur propre non nulle de φ . Montrer que les vecteurs propres de φ associés à λ sont des endomorphismes nilpotents.

Exercice 29. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

0407-17

Déterminer la dimension de $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; AB = BA\}$.

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes.

A026-23

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que f et $P(f)$ sont diagonalisables et admettent une base de diagonalisation commune.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que f et g commutent. Montrer que g est diagonalisable.
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est $\{Q(f) ; Q \in \mathbb{C}[X]\}$.

Exercice 31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 + A + 4I_n = 0$.

A053-24

1. Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.
2. Montrer que n est pair.
3. Exprimer la trace et le déterminant de A .

Exercice 32. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on pose $M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

1039-26

- a. Trouver des vecteurs propres de $M(a, b)$ indépendants de (a, b) .
- b. En déduire que la matrice $M(a, b)$ est diagonalisable.
- c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la suite de matrices $(M(a, b)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Exercice 33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. On pose $p = \text{rg}(A)$ et on suppose que $p \geq 1$.

1375-26

On pose $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & -A \end{pmatrix}$.

- a. Calculer B^3 . La matrice B est-elle diagonalisable ?
- b. Déterminer les espaces propres de B et leurs dimensions.

Espaces euclidiens

Exercice 34. On munit \mathbb{R}^3 de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et de son produit scalaire canonique.

A094-24

On note u le vecteur $(1, 1, 1)$ de \mathbb{R}^3 .

On définit l'application $f : x \mapsto \sum_{i=1}^3 x_i \left(e_i - \frac{1}{3}u \right)$ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que f est un projecteur orthogonal de E .
2. Déterminer le rang de f .

Exercice 35. Soit $L = (a_1 \ \cdots \ a_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$.

A066-24

On pose $M = I_n - 2L^T \times L$.

1. Montrer que M est une matrice orthogonale.
2. Reconnaître l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à M .

Exercice 36. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

A085-17

$$(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

- a. Prouver qu'on a alors défini un produit scalaire.
- b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 37. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son spectre est inclus dans $i\mathbb{R}$.

0559-16

Exercice 38. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est triangulaire.

A070-24

Que peut-on dire de M ?

Exercice 39. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

1069-24

Montrer que la suite de terme général $\frac{\langle X, A^{k+1}X \rangle}{\langle X, A^k X \rangle}$ converge vers une valeur propre de A , à déterminer.

Exercice 40. Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

0698-17

Exercice 41. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Déterminer $\max \{\text{tr}(PS) ; P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$.

0658-24

Exercice 42. Soit k un entier impair. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^k = B^k$.

1308-26

a. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(A^k)$.

b. Montrer que A et B commutent.

c. Montrer que $A = B$.

Exercice 43. Prouver que $\min \left\{ \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 dx ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ existe et calculer sa valeur.

S002-26

Exercice 44. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = A^T \times A$. On note λ la plus grande valeur propre de B .

0825-16

a. Montrer que λ est positif.

b. Pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer la majoration $\|AX\| \leq \sqrt{\lambda} \|X\|$. Cas d'égalité?

c. Qu'obtient-on dans le cas $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Espaces vectoriels normés

Exercice 45. On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A064-24

1. Montrer que l'adhérence de $D_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Déterminer l'adhérence de $D_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 46. On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout élément f de E , on note

A032-15

$$g_1(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad g_2(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt.$$

1. Montrer que g_1 et g_2 sont des normes sur E .

2. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans les espaces vectoriels normés (E, g_1) et (E, g_2) .

Exercice 47. Pour tout $q \in]0, 1[$ et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_q(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P(k)| q^k$.

1049-26

- Montrer que N_q est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
- Est-ce une norme euclidienne ?
- Si $p \neq q$, les normes N_p et N_q sont-elles équivalentes ?

Suites numériques

Exercice 48. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n-1 \\ i+j=n}} \frac{1}{ij}$.

P002-24

Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 49. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n = \sum_{k=1}^n X^k - 1$.

A001-24

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n possède une unique racine dans $]0, +\infty[$. Celle-ci est notée x_n .
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et trouver sa limite (notée ℓ pour la suite de l'énoncé).
- Trouver un équivalent de $x_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 50. On fixe $\alpha \in]0, 1[$ et on définit $f : t \mapsto 1/t^\alpha$ de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

A099-24

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \min \left\{ p \in \mathbb{N}^* ; \sum_{k=1}^p f(k) \geq n \right\}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que a_n est bien défini et prouver la minoration $a_n \geq n$.
- Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^n f(k)$ quand n tend vers $+\infty$.
- Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 51. Montrer que les suites $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$, $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ sont divergentes.

0893-15

Exercice 52. Pour tout x réel, on note $\{x\} = x - [x]$.

A012-23

Trouver un équivalent de $\{n!e\}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 53. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$ tende vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
Prouver que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.

0452-15

Exercice 54. On fixe $u_0 > 0$ puis on pose $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$ pour tout n dans \mathbb{N} . Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

0430-17

Exercice 55. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$ et $S_n = \prod_{k=1}^n (n+k)^{1/n}$.

1213-22

- Calculer la limite de R_n quand n tend vers $+\infty$.
- Trouver un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 56. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que f a une infinité de zéros.

1074-26

Exercice 57. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\int_0^1 f(t) dt = 1/2$.

0452-17

Montrer que f possède au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?

Exercice 58. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \pi/2$.

0503-16

Exercice 59. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telles que

A031-24

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 60. Soient f et g deux fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que $f \circ g$ est décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe.

0721-17

Exercice 61. Soient P et Q deux polynômes réels non nuls.

A048-24

L'équation $\frac{P(x)}{Q(x)} = e^x$ peut-elle avoir une infinité de solutions ?

Exercice 62. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$.

0584-17

- a. Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- b. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ .
- c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1} .

Séries numériques

Exercice 63. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

S001-24

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $R_n \leq \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et en déduire que $R_n = \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin^\alpha(2\pi en!)$.
3. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi en!)$.

Exercice 64. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant u_0 dans $]0, 1]$ puis en posant $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

A065-24

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Trouver la limite de $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n^3$.
3. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ diverge.

Exercice 65. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

0830-17

Exercice 66. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.

1342-24

1. Montrer qu'il existe une constante γ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $P_n \sim C/\sqrt{n}$.

Exercice 67. Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on note $s(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n .

1058-12

Convergence et somme de la série de terme général $\frac{s(n)}{n(n+1)}$.

Exercice 68. Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$.

0380-09

Suites et séries de fonctions

Exercice 69. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : t \mapsto n \cos(t) \sin^n(t)$.

1100-18

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, \pi/2]$, puis la convergence uniforme.

Exercice 70. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

A035-24

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . Sa somme est notée f .
2. Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 71. Pour tout x réel convenable, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

A068-24

1. Montrer que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 72. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

0513-16

- a. Justifier que la fonction S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
- b. Étudier les variations de S et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
- c. Pour tout $x > 0$, prouver la relation $xS(x) - S(x+1) = e^{-1}$.
- d. Trouver des équivalents de $S(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.

Séries entières

Exercice 73. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ possède un rayon de convergence R fini et strictement positif.

0515-16

Trouver les rayons de convergence de $\sum a_n z^{2n}$, de $\sum (a_n)^2 z^n$ et de $\sum a_n z^{n^2}$.

Exercice 74. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n} x^n$.

0863-17

Exercice 75. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On pose $R_a = R\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right)$.

1550-26

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$. On pose enfin $R_b = R\left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n\right)$.

- Montrer que $R_b \geq \max(1, R_a)$.
- Si $R_b > 1$, montrer que $R_a = R_b$.
- Montrer que $R_b = \max(1, R_a)$.

Exercice 76. 1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + n^2}$ converge.

A054-24

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1 + k^2}$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} R_n x^n$.

Exercice 77. On définit une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant $a_0 = 1$ puis

A078-24

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}.$$

- Montrer que tous les termes de cette suite sont rationnels.
- On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ quand c'est possible.
 - Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ vaut au moins 1. On le note R .
 - Pour tout z complexe tel que $|z| < R$, montrer l'égalité $f(z) = \frac{2}{e^z + 1}$.
 - En déduire une majoration de R .

Exercice 78. On considère l'équation différentielle suivante, notée (E).

A045-24

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

- Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
- Trouver une expression de ces fonctions à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 79. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ soit de rayon infini. Sa somme est notée f .

1500-24

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in [0, +\infty[$, calculer $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int} dt$.
- Montrer que si f est bornée sur \mathbb{C} , alors elle est constante.

Exercice 80. Pour tout p dans \mathbb{N}^* , on définit la fonction $f_p : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{np}$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière écrite ci-dessus et préciser la limite de la fonction f_p en R^- .

b. Déterminer un équivalent de $f_p(x)$ quand x tend vers R^- . On appliquera la méthode des rectangles.

Intégration

Exercice 81. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est positive.

Montrer l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$.

Exercice 82. Trouver un équivalent simple de $\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)} dt$ quand x tend vers 0.

Exercice 83. Convergence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$ en posant $u = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

Exercice 84. Convergence et valeur de $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \right) dt$.

Exercice 85. Existence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}$.

Exercice 86. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

1. Justifier l'existence de cette intégrale.
2. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 87. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On suppose que f est croissante et que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ converge.

a. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

b. Montrer que $-\ln(x) \sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$ tend vers $\int_0^1 \frac{f(u)}{u} du$ quand x tend vers 1.

c. Trouver un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$ quand x tend vers 1.

Exercice 88. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$.

1. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, montrer la majoration $|e^{iu} - 1| \leq |u|$.
2. Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
3. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} puis obtenir une expression simplifiée de f .

Exercice 89. Soient a et b dans $]0, +\infty[$. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$.

0788-16

a. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} .

b. Exprimer $F(x)$.

Exercice 90. Étudier la suite de terme général $I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

0675-10

Équations différentielles

Exercice 91. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

S002-24

1. Diagonaliser la matrice A .

2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'' = 5x + y \\ y'' = -7x - 3y. \end{cases}$

Exercice 92. Résoudre l'équation différentielle $x^2 f'(x) + f(x) = 1$ sur $]0, +\infty[$. Trouver les solutions sur \mathbb{R} .

0972-16

Exercice 93. Résoudre l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ à l'aide de la fonction $z : t \mapsto y(e^t)$.

2021-09

Exercice 94. Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant l'identité $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$.

0406-09

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 95. On définit $f : (x, y) \mapsto xe^y + ye^x$ sur \mathbb{R}^2 et $g : t \mapsto t + \exp(t - 1/t)$ sur \mathbb{R}^* .

A063-17

Résoudre l'équation $g(t) = 0$. En déduire les points critiques de f puis étudier ces points critiques.

Exercice 96. On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(0, 0) = 0$ et

1142-26

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

a. Justifier que f est continue sur \mathbb{R} .

b. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

c. Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Exercice 97. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse

0642-17

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geq 1.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 98. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

0396-13

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que toutes les dérivées partielles de f sont bornées par 1.

Montrer la majoration

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|.$$

Exercice 99. On définit de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} la fonction $f : (x, y) \mapsto |\sin(x + iy)|^2$.

A096-24

On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Pour tout $t \geq 0$, prouver les inégalités $\sin(t) \leq t$ et $\operatorname{sh}(t) \geq t$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, prouver les égalités $f(x, y) = \operatorname{ch}^2(y) \cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y) \sin^2(x)$ et

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}.$$

3. Préciser le signe de f sur \mathbb{R}^2 et montrer que f possède un minimum en $(0, 0)$.

4. Montrer que D est fermé et borné, puis en déduire que f possède un maximum sur D .

5. On pose $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < 1\}$.

5.1. Montrer que D' est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

5.2. Déterminer l'ensemble des points critiques de F sur D' .

5.3. En déduire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que le maximum de f sur D soit $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.

6. On définit $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Montrer que g est croissante sur $[0, \pi/2]$ et en déduire le maximum de f sur D .

Exercice 100. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$. On définit

A017-23

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$$

de $]0, +\infty[^3$ dans \mathbb{R} .

Déterminer les choix de f pour lesquels la fonction Φ est harmonique.

Exercice 101. Résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

S001-23

Exercice 102. Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u, v) = (x, ye^{x^2/2})$.

1140-17

Exercice 103. On définit de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 l'application $f : (x, y) \mapsto (x + y, x^7 - y^7)$.

0610-16

Montrer que f est une bijection.

Exercice 104. On considère les ensembles

1344-26

$$A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + iy \in A\}.$$

a. Soit $(x, y) \in D$. On pose $z = x + iy$. On considère $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$ tels que $z = re^{i\theta}$.

Montrer que $\theta = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

b. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall u \in D, \quad \langle u, \nabla f(u) \rangle = \frac{1}{\|u\|},$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^2 .

Probabilités et dénombrement

Exercice 105. Déterminer le nombre d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $f \circ f = f$.

0613-16

Exercice 106. Cardinal de $\{(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k ; i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$.

S003-26

Cardinal de $\{(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k ; i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k\}$.

Cardinal de $\{(i_1, \dots, i_k) \in (\mathbb{N}^*)^k ; i_1 + \dots + i_k = n\}$.

Cardinal de $\{(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k ; i_1 + \dots + i_k = n\}$.

Exercice 107. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

A093-24

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ puis $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geq \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 108. 1. Soit A une partie finie et non vide de \mathbb{R} . Soit $x_0 \in A$.

A093-24

Trouver tous les polynômes $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q(x_0) = 1$ et

$$\forall x \in A \setminus \{x_0\}, \quad Q(x) = 0.$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires finies.

Montrer que l'indépendance de X et Y équivaut à

$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{E}(X^k Y^\ell) = \mathbb{E}(X^k) \mathbb{E}(Y^\ell).$$

Exercice 109. On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une série de tirages sans remise.

0887-24

1. Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, \dots, 2n - 1$.

2. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel on a tiré toutes les boules de numéros impairs.

Déterminer la loi et l'espérance de X .

Exercice 110. Soit $\lambda > 0$. On considère deux variables aléatoires X et Y de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, que l'on suppose indépendantes.

A077-24

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} (-1)^{X(\omega)} & 1 \\ (-1)^{Y(\omega)} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que M soit inversible.

2. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable sur \mathbb{R} .

3. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable sur \mathbb{C} .

4. Mêmes questions pour la matrice $K = \begin{pmatrix} M & M \\ M & M \end{pmatrix}$.

Exercice 111. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$.

0909-24

1. Montrer que Y suit une loi géométrique.

2. Vérifier que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 112. Soit X une variable aléatoire réelle positive tel que $X(\Omega)$ soit fini.

1154-26

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer l'égalité $\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{+\infty} kt^{k-1}\mathbb{P}(X > t) dt$.

Exercice 113. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^* .

1155-26

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathbb{P}(Y = n) > 0$ et on suppose que la loi conditionnelle de X sachant $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- Montrer que $Y + 1 - X$ et X ont la même loi.
- On suppose que Y suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de X .

Exercice 114. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$.

1157-26

On pose $U = X/Y$.

- Déterminer la loi de U .
- Calculer $\mathbb{E}(U)$.

Exercice 115. On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

S002-23

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

En particulier, la variable aléatoire S_0 est nulle. On note T le temps de retour en 0 (éventuellement infini), c'est-à-dire

$$T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* ; S_n = 0\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = (T > n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose

$$A_k^n = (S_k = 0) \cap \bigcap_{i=k+1}^n (S_i \neq 0).$$

On pose enfin $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n$.

- Vérifier que f et g sont bien définies sur $[0, 1[$.
- Soient deux entiers k et n tels que $1 \leq k < n$. Montrer que $(S_{k+1} - S_k, \dots, S_n - S_k)$ et (S_1, \dots, S_{n-k}) ont la même loi.
- En déduire l'égalité $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$ puis simplifier la somme $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.
- Pour tout x dans $[0, 1[$, montrer l'égalité $f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}$ et en déduire une expression de $g(x)$.
- Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}$.
- En déduire la loi de T . On vérifiera en particulier que T est presque sûrement finie.
- Calculer l'espérance de T .

Piste noire

Algèbre de première année

Exercice 116. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in [-1, 1]$.

A122-24

Montrer que les racines complexes du polynôme $X^{n+1} - aX^n + aX - 1$ sont de module 1.

Exercice 117. On considère des nombres réels x_0, \dots, x_n tous distincts.

0223-24

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note ℓ_k la forme linéaire $P \mapsto P(x_k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que (ℓ_0, \dots, ℓ_n) est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k).$$

Algèbre de deuxième année

Exercice 118. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A095-24

1. Dans cette question, on suppose que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ est non vide et on prend α dans cette intersection.

1.1. Montrer qu'il existe une matrice colonne Y non nulle telle que $B^T Y = \alpha Y$.

1.2. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une matrice M non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$. On note r le rang de M.

2.1. Rappeler le théorème du rang en version géométrique.

2.2. En déduire qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$Q^{-1}MP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Montrer que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ n'est pas vide.

Exercice 119. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

0224-24

1. On suppose que la matrice $A + iB$ est inversible. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB$ soit inversible.

2. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 120. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

A052-18

Montrer que c'est encore vrai si A n'est pas inversible.

Exercice 121. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse

0380-18

$$\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_{k,k}).$$

Montrer que la matrice A est diagonale.

Exercice 122. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices $A^T \cdot A$ et $A \cdot A^T$ sont semblables.

0379-18

Exercice 123. Soit $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. On suppose que

A007-24

$$\operatorname{tr}(A) = 3, \quad \operatorname{tr}(A^2) = 5, \quad \operatorname{tr}(A^3) = 9.$$

On note U l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{tr}(AM) = 1$ et $\operatorname{tr}(A^2M) = 3$.

Déterminer $\min \{ \operatorname{tr}(M^2) ; M \in U \}$.

Exercice 124. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

A050-24

On suppose que

$$\forall s > 0, \quad \operatorname{tr}((A + sI_2)^{-1}) = \operatorname{tr}((B + sI_2)^{-1}).$$

Montrer que A et B sont semblables.

Analyse de première année

Exercice 125. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que cette suite est *sous-additive*, c'est-à-dire

0174-15

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n,$$

et que la suite $(a_n/n)_{n \geq 1}$ est minorée. Prouver que la suite $(a_n/n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Exercice 126. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

A003-24

On suppose que f'' est bornée sur \mathbb{R} et que f tend vers 0 en $+\infty$.

Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 127. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant $u_0 > 0$ et en posant $u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n}$.

A004-24

a. Montrer que cette suite est bien définie puis qu'elle converge, et préciser sa limite.

b. Pour tout $\alpha > 0$, montrer que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 128. Étudier la suite complexe de terme général $z_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{i}{k}\right)$.

1084-24

Analyse de deuxième année

Exercice 129. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$.

0240-24

Exercice 130. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive sommable.

0241-24

Pour tout $x > 0$, montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n^x}{n}$ converge.

Exercice 131. Pour tout $x \in]-1, 1[$, prouver l'égalité $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k$.

A080-24

En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} (\zeta(2k) - \zeta(2k+1))$.

Exercice 132. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On fait l'hypothèse

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

0456-19

Exercice 133. Existe-t-il une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum (u_n)^3$ diverge ?

0356-16

Exercice 134. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n - (n+2).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur u_0 pour que cette suite soit bornée.

0346-16

Exercice 135. Déterminer les extremums de $f : (x, y) \mapsto \min(x, y)(1 - \max(x, y))$ sur $[0, 1]^2$.

0860-24

Autres thèmes

Exercice 136. Calculer le nombre de diviseurs dans \mathbb{N}^* de 1 000 000.

0382-15

Exercice 137. Étant donné 13 nombres réels distincts, montrer qu'il en existe deux parmi eux, notés x et y , tels que

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

0986-24

Exercice 138. Soient p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Prouver l'égalité

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

0006-16

Exercice 139. Soit $p \in]0, 1[$. On considère une pièce de monnaie qui réalise **pile** avec une probabilité p .

P001-24

On lance la pièce jusqu'à obtenir **pile**. Le rang du lancer auquel **pile** est obtenu est noté ℓ .

On lance alors ℓ fois un dé à 6 faces. Une victoire à ce jeu consiste à avoir obtenu exactement une fois le chiffre 6.

Déterminer la valeur de p pour laquelle la probabilité de victoire est maximale.

Exercice 140. On note c_n le nombre de listes (a_1, \dots, a_n) obtenues comme permutations de $(1, \dots, n)$ telles que

0469-24

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad a_{i+1} \neq a_i + 1.$$

1. Pour tout entier $n \geq 3$, montrer que $c_n = (n-1)c_{n-1} + (n-2)c_{n-2}$.

2. Montrer que la suite $\left(\frac{c_n}{n!}\right)_{n \geq 2}$ possède une limite non nulle.

Exercice 141. Pour tout $\lambda > 0$, on se donne des variables aléatoires $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

0192-17

a. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}(|A_\lambda - \lambda| \geq \varepsilon \lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

b. Déterminer la limite quand λ tend vers $+\infty$ de la probabilité de l'événement « Le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ a toutes ses racines réelles. ».

Exercice 142. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$.

0365-17

Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + (A-1)y' + By = 0$ aient une limite nulle en $+\infty$.