Mathématiques — préparation à l'oral 2026 — indications

Exercice 7. J'en ai parlé au détour d'un exercice sur les séries entières.

Exercice 21. Réaliser une analyse-synthèse.

Dans l'analyse, trouver les valeurs possibles pour le rang de A et de B. Dans le cas où l'une d'elles est de rang 1, raisonner sur son noyau et son image.

Exercice 37. On peut s'inspirer de ce qui a été fait en cours pour les matrices symétriques réelles.

Exercice 52. Voir l'exercice 63.

Exercice 53. Poser $y_n = x_n + \dfrac{1}{2}x_{n+1}$ et trouver une quantité z_n telle que $y_n z_n$ s'écrive sous la forme $t_n - t_{n+1}$.

Exercice 56. Raisonner par l'absurde.

Exercice 58. Commencer par prouver que cette équation possède une unique solution et trouver un encadrement de cette solution.

Pour trouver sa valeur, penser au lien entre $\mathrm{Arctan}(x)$ et $1 + \mathrm{i}x$.

Exercice 59. Étant donné $r \in]0,1[$, appliquer le théorème des bornes atteintes sur le segment $[0, r]$.

Au fait, que vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$?

Exercice 61. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si f possède au moins $n+1$ zéros, montrer que $f^{(n)}$ possède au moins un zéro.

Exercice 67. Sommation par paquets.

Exercice 82. Nous avons dans le cours un point-méthode consacré à ce type d'exercice.

Exercice 85. Pour le calcul, il s'agit bien de décomposer la fraction en éléments simples.

Exercice 87. La question **b** utilise une variante de la méthode des rectangles.

Exercice 92. Pour la recherche des solutions sur $\mathbb{R}$, procéder par analyse-synthèse.

Exercice 93. Commencer par exprimer $x^2y''(x) + y(x)$ en fonction de z. Une fois que ce calcul est terminé, on peut aborder la résolution par équivalences.

Exercice 94. Introduire la partie paire et la partie impaire de f.

Exercice 95. Montrer que l'équation $g(t) = 0$ possède une unique solution et trouver une solution « évidente ».

Exercice 97. Reconnaître une dérivée issue de la règle de la chaîne.

Exercice 100. Commencer par calculer $\Delta\Phi$ avant d'attaquer la résolution.

Exercice 103. Poser l'équation $f(x, y) = (a, b)$ et comprendre qu'il s'agit d'une question en une seule variable.

Exercice 112. La quantité $\mathbb{P}(\mathrm{X} > t)$ peut être exprimée explicitement.

Exercice 116. Étant donné une racine z, écrire l'équation sous la forme $z^n(z - a) = 1 - az$.

Exercice 119. Exercice 35 du chapitre 8.

Exercice 120. Exercice 21 du chapitre 9.

Exercice 125. Poser $\ell = \inf \left\{ \dfrac{a_n}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Fixer ensuite $\varepsilon > 0$ et expliquer qu'on peut choisir $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{a_p}{p} \leqslant \ell + \varepsilon$.

Pour un entier n quelconque, effectuer la division euclidienne de n par p et trouver un moyen de progresser.

Exercice 126. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $|f(x + h) - f(x) - hf'(x)|$.

En déduire que f' est bornée sur $[a, +\infty[$ et trouver un majorant (indépendant de h) de $||f'||_{\infty,[a,+\infty[}$.

Exercice 127, question b. Il s'agit de montrer que $\dfrac{1}{n}(u_n)^{-1/\alpha}$ tend vers 0.

Trouver la limite de $(u_n)^{-1/\alpha} - (u_{n-1})^{-1/\alpha}$ puis conclure avec le *théorème de Césàro*.

Certes ce théorème n'est pas au programme mais arrêtez de faire du mauvais esprit.

Exercice 128. Mettre $1 + \dfrac{\mathrm{i}}{k}$ sous forme trigonométrique.

Exercice 129. *Première méthode.* Linéariser $\sin^2(n)$ et revoir l'exercice 18 du chapitre 3.

Deuxième méthode. Constater que $\sin^2(n)$ est *souvent* minoré par une constante bien choisie.

Exercice 130. Inégalité de Hölder.

Exercice 131. Il s'agit de calculer l'intégrale par une intégration terme à terme et d'exprimer la somme de série en utilisant le théorème de Fubini.

Exercice 137. Le quotient $\dfrac{x-y}{1+xy}$ doit évoquer une formule de trigo.

Exercice 138. Effectuer le changement d'indice $\ell = q - k$.