

Préparation aux oraux 2026

Mécanique

1. Fermeture des orbites quasi-circulaires (A. Domsps)

On considère dans ce problème un point matériel M de masse m se déplaçant sous l'action d'une unique force de la forme

$$\vec{F} = -k r^n \vec{u}_r = -k OM^n \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

avec $n \in \mathbb{R}$ et $k > 0$. Dans un tel champ de forces, des trajectoires circulaires sont bien entendu envisageables, mais ce ne sont pas les seules. On souhaite savoir à quelle condition, portant sur n , d'autres trajectoires périodiques sont possibles. On va répondre à cette question en restreignant l'étude aux orbites proches d'un cercle.

1. Pour $n = 1$, montrer en utilisant les coordonnées cartésiennes que le mouvement de M est elliptique ; exprimer sa période T et sa pulsation ω . Donner les équations horaires du mouvement dans le cas où le point M se trouve initialement en $(r_0, 0, 0)$ avec une vitesse $(0, v_0, 0)$. À quelle condition obtient-on une orbite circulaire ?

2. Pour $n = -2$, retrouver l'expression de la période du mouvement lorsque la trajectoire est circulaire de rayon r_0 . Quel autre de type de trajectoire fermée peut-on rencontrer ? Comment la période T est-elle alors liée à une grandeur définissant l'extension spatiale de cette trajectoire ?

3. On suppose dorénavant n quelconque. Pourquoi peut-on restreindre l'étude à un plan ? À quelle condition liant la vitesse initiale v_0 et la distance initiale r_0 le mouvement est-il circulaire ? Comment s'expriment alors sa période et sa pulsation ?

4. On suppose maintenant que la vitesse initiale possède une composante radiale v_{0r} et une composante orthoradiale $v_{0\theta}$, cette dernière vérifiant la condition explicitée dans la question précédente

$$\vec{v}_0 = v_{0r} \vec{u}_r + v_{0\theta} \vec{u}_\theta \quad .$$

Pour étudier le mouvement, on utilise le concept d'énergie potentielle efficace.

- Comment s'exprime l'énergie potentielle ?
 - Justifier que le produit $C = r^2 \dot{\theta}$ est constant au cours du mouvement. Exprimer C en fonction des conditions initiales.
 - Exprimer l'énergie mécanique en faisant intervenir les constantes du problème ainsi que r , \dot{r} , mais pas $\dot{\theta}$.
 - Donner l'expression de l'énergie potentielle efficace $E_{\text{peff}}(r)$. Tracer schématiquement son graphe pour $n = 1$, $n = -2$ et $n = -4$.
 - Sur ces graphes, indiquer quelle abscisse correspond à une orbite circulaire. Retrouver ainsi le résultat de la question 3 sur les orbites circulaires.
5. On suppose que r_0 et $v_{0\theta}$ vérifient la condition nécessaire à une orbite circulaire, mais la vitesse initiale possède aussi une petite composante radiale v_{0r} . Comme $v_{0r} \ll v_{0\theta}$, on peut espérer que le mouvement reste très proche d'une orbite circulaire et on pose $r = r_0 + \epsilon$ avec $\epsilon \ll r_0$. En utilisant le graphique précédent, décrire le mouvement et représenter l'allure de la trajectoire.
6. Montrer que

$$E_{\text{peff}}(r) \simeq E_{\text{peff}}(r_0) + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{3mC^2}{r_0^4} + kn r_0^{n-1} \right) = E_{\text{peff}}(r) \simeq E_{\text{peff}}(r_0) + k(n+3) r_0^{n-1} \frac{\epsilon^2}{2}$$

7. Étudier le mouvement radial, c'est à dire l'évolution temporelle de $\epsilon(t)$. À quelle condition l'orbite circulaire est-elle stable ? Lorsqu'elle l'est, exprimer la période T_ϵ des oscillations radiales.

8. Au premier ordre en ϵ , le mobile décrit une révolution complète autour de l'origine pendant la période T exprimée dans la question 3. Dans le même temps, ϵ et r évoluent périodiquement. À quelle condition la trajectoire est-elle fermée, c'est à dire repasse par le même point après un tour ?

9. Vérifier que cette condition est satisfaite pour $n = 1$ et $n = -2$. On pourra illustrer les résultats en utilisant un calcul numérique codé dans le fichier Python `resout_perturbation_mvt_circulaire.py`.

2. Mouvement d’une goutte chargée autour d’un fil électrisé (A. Aït Kaddi)

À bord de la Station Spatiale Internationale, la quasi-absence de gravité permet de réaliser des expériences impossibles sur Terre. En 2012, l’astronaute Don Petit en a conduit une très élémentaire. Après avoir électrisé une fine baguette en la frottant, il a placé à son voisinage une goutte d’eau chargée et observé son mouvement. Une vidéo de l’expérience (accessible en cliquant sur ce lien https://www.youtube.com/watch?v=qHrBhgwq__Q), montre que la goutte tourne autour de la baguette, à une distance $r_0 = 20$ mm avec une période $T = 3$ s.

On modélise la goutte par un point matériel portant une charge q et la baguette par un fil infini portant une charge λ par unité de longueur, avec $q\lambda < 0$ de manière à produire une interaction attractive. Rayon de la goutte $R = 3$ mm, masse volumique de l’eau $\rho_e = 1000$ kg.m⁻³.

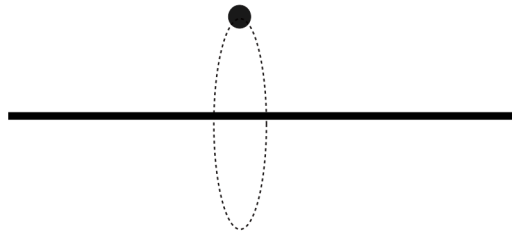


FIGURE 1 – Goutte chargée en mouvement près d’une baguette électrisée

1. Exprimer le champ électrostatique et le potentiel (à une constante près) créés autour d’elle par la baguette.
2. Relier le produit $q\lambda$ au rayon r_0 et à la période T_0 de l’orbite circulaire. Calculer numériquement $q\lambda$ avec $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹.
3. On envisage maintenant une situation où la vitesse initial v_0 est distincte de celle v_c de l’orbite circulaire. On utilise des coordonnées cylindriques et on pose $\vec{v}_0 = \alpha v_c \vec{u}_\theta$. Justifier que le mouvement se fait dans un plan perpendiculaire la baguette.
4. Justifier que le produit $r^2 \dot{\theta}$ est une constante et en donner l’expression en fonction de r_0 et v_0 .
5. Sans déterminer explicitement le mouvement, montrer qu’il est radialement borné et le décrire. Esquisser l’allure de la trajectoire en distinguant les cas $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$.
6. Pour une étude plus complète, on procède à une résolution numérique des équations du mouvement. Établir le système différentiel d’ordre un satisfait par $X = (r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$.
7. Compléter le code Python `mvt_charge_autour_fil_eleve.py` puis l’utiliser pour représenter la trajectoire. On a noté $\beta = -q\lambda/(2\pi\epsilon_0)$. Commenter les résultats.
8. Que se passe-t-il si la vitesse possède initialement une composante parallèle à la baguette ?

3. Mouvement d’une goutte chargée autour d’un fil électrisé : prise en compte des frottements (A. Badre)

Cet exercice est la suite du précédent mais en est séparé afin que deux élèves distincts présentent les deux parties.

À cause des frottements de l’air, le rayon de l’orbite de la goutte décroît peu à peu jusqu’à ce qu’elle « s’écrase » sur le fil. On donne la viscosité dynamique et la masse volumique de l’air : $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, $\rho_a = 1,2$ kg.m⁻³.

1. Proposer une expression pour la force exercée par l’air sur la goutte.
2. Comme la force de frottement est faible, le rayon de l’orbite décroît très lentement et on admet qu’on peut l’assimiler à un cercle sur un tour. En déduire l’expression de la vitesse v en fonction de q , λ , m , ϵ_0 .
3. Par un raisonnement énergétique, montrer que r évolue selon une relation de la forme

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{\tau}$$

et donner l’expression de τ en fonction des paramètres du problème.

4. En déduire l'évolution de r et trouver au bout de combien de temps la goutte entre en contact avec la baguette de rayon $r_f = 3$ mm.
5. Analyser la légitimité de l'approximation qui considère l'orbite quasi circulaire.
6. En reprenant les question 6 et 7 de l'exercice précédent, résoudre les équations du mouvement sans approximation et commenter le résultat.

4. Oscillateur amorti par frottement solide (J. Demangel)

Un cube de masse m , attaché à un ressort de raideur k , repose sur un plan horizontal contre lequel il peut se déplacer avec un coefficient de frottement μ identique pour le cas statique et le cas dynamique (figure 2). On note x l'abscisse de son centre de masse G , l'origine étant choisie dans la position où le ressort est détendu. On place le mobile à l'abscisse $x_0 \neq 0$ (le ressort est alors tendu) puis on l'abandonne sans vitesse à $t = 0$.

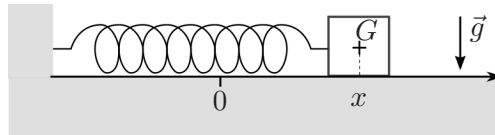


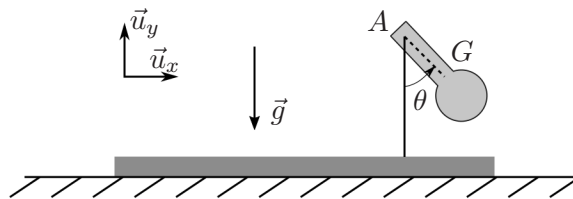
FIGURE 2 – Cube oscillant en frottant sur un plan horizontal

1. Déterminer la valeur minimale x_ℓ de $|x_0|$ qui permet au cube de se mettre en mouvement.
2. Pour fixer les idées, on considère dorénavant la situation définie par $x_0 = 8,5x_\ell$. Dans quel sens le cube se met-il à bouger ? Déterminer la loi horaire $x(t)$ de son mouvement.
3. Quelles sont la date t_1 et la position du cube lorsque sa vitesse s'annule pour la première fois ? Justifier que le cube se remet à bouger dès t_1^+ .
4. Étudier la suite du mouvement en précisant en particulier dans quelle position le cube s'arrête définitivement.

5. Pendules sur un support mobile (K. Sou)

Pour traiter cet exercice, vous pourrez recourir à un formulaire d'analyse vectorielle.

On considère un pendule de masse m dont l'axe de rotation (A, \vec{u}_z) est fixé par des pièces rigides de masse négligeable à une plaque horizontale de masse M . On note J son moment d'inertie et $r = AG$ la distance de son centre de masse G à l'axe de rotation. La plaque est posée sur une table horizontale sur laquelle elle peut se déplacer sans frottement ; son mouvement est repéré par l'abscisse x de son centre. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



1. En raisonnant dans le référentiel de la plaque, déterminer l'équation du mouvement du pendule, en faisant notamment intervenir la dérivée seconde \ddot{x} de x par rapport au temps, grandeur pour l'instant inconnue.
2. En raisonnant sur le système composé de la plaque et du pendule, déterminer l'expression de \ddot{x} en fonction de $d^2(\sin \theta)/dt^2$ et des paramètres du problème.
3. En déduire l'équation du mouvement du pendule en faisant apparaître

$$\beta = \frac{m^2 r^2}{JM_{\text{tot}}} \quad \text{avec} \quad M_{\text{tot}} = M + m \quad .$$

La résoudre dans le cas des petits mouvements.

4. On considère maintenant la situation où deux pendules identiques sont placés sur la plaque, suffisamment espacés l'un de l'autre pour ne pas entrer en collision. En adaptant les raisonnements précédents, déterminer les équation différentielles couplées dont leurs élongations angulaires θ_1 et θ_2 sont solutions.

5. Les deux pendules sont abandonnés sans vitesse initiale depuis des angle $\theta_1(0) > 0$ et $\theta_2(0) = 0$. L'exploitation d'une vidéo a permis d'obtenir le graphe des variations de θ_1 au fil du temps visible sur la figure (3). On donne $J = 3mr^2/2$. En utilisant le fait que β est petit devant 1, calculer le rapport m/M .

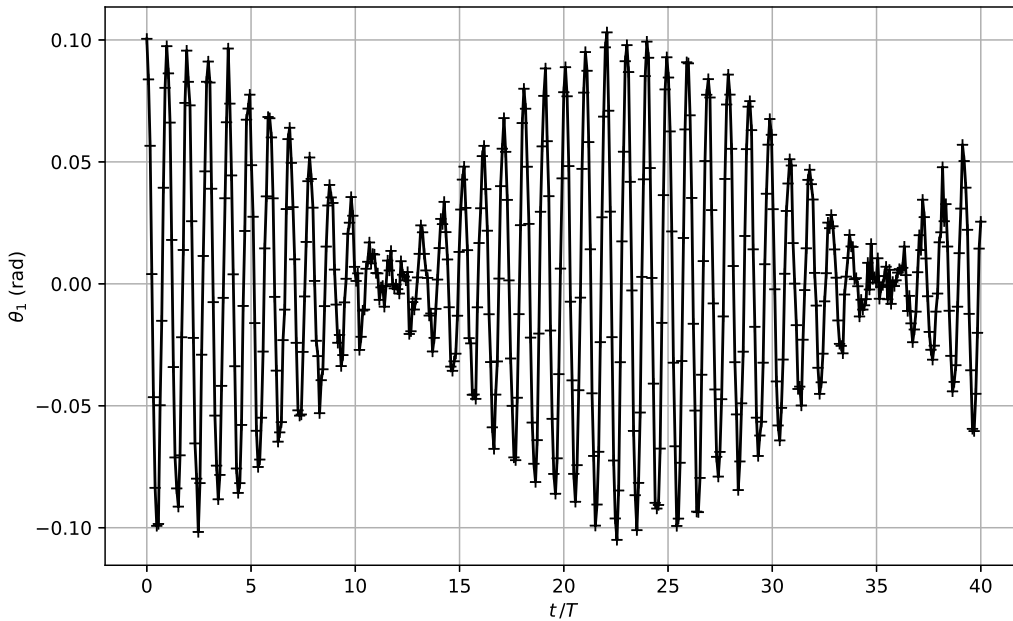


FIGURE 3 – Variations de θ_1 en fonction du temps adimensionné t/T (T est la période propre des pendules.)

6. Arrimage d'un bateau (L. Barotte)

Un bateau est arrimé par une corde parcourant n tours ($n \in \mathbb{R}$) d'enroulements sur un bollard fixé sur le quai. L'autre extrémité de la corde est tendue par un marin musclé exerçant une force $F_0 = 500$ N. On suppose pour simplifier que la partie enroulée de la corde se trouve dans un plan horizontal dont l'intersection avec le bollard est un cercle de centre O et de rayon a . La figure 4 représente schématiquement la situation dans le cas particulier où $n = 1/2$. On note M_0 le point où se termine l'enroulement, du côté du marin et on repère un point M de la corde enroulée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$.

Lorsque le bateau s'éloigne du quai, la corde se tend et s'immobilise grâce à l'action de l'opérateur. On étudie donc une situation de quasi-équilibre où la corde se trouve à la limite du glissement sur son support.

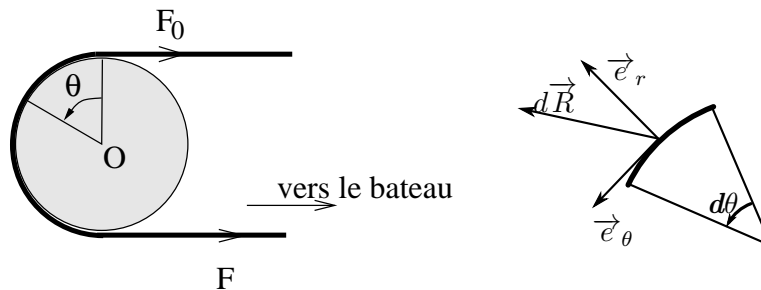


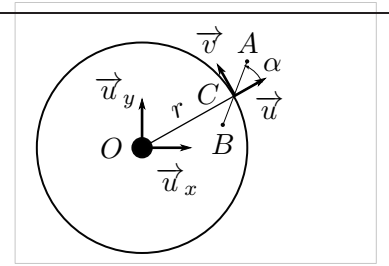
FIGURE 4 – Corde d'arrimage enroulée sur un bollard

1. On décompose la corde en arcs de cercles infinitésimaux vus sous l'angle $d\theta$. Chacun subit de la part du bollard des forces de frottement réparties sur sa longueur mais qu'on modélise par une réaction infinitésimale $d\vec{R}$ ponctuelle obéissant aux lois de Coulomb avec un coefficient μ . En exploitant cette modélisation, déterminer la manière dont la tension T de la corde dépend de θ .

2. Si le bateau exerce une force $F = 10^5 \text{ N}$ sur la corde et si $\mu = 0,2$, estimer le nombre de tours nécessaires pour que le marin puisse le retenir.

7. Stabilisation d'un satellite par gradient de gravité (L. Bazart)

Un satellite de masse $2m$ décrit autour de la Terre de masse M une orbite circulaire de rayon r à la vitesse angulaire ω . Il est formé de deux modules A et B de masse m assimilés à des points matériels liés entre eux par une tige rigide de longueur $2L$ et de masse négligeable (figure).



Données numériques : $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ SI}$, $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $m = 100 \text{ kg}$, $L = 5 \text{ m}$, $r = 7,0 \cdot 10^3 \text{ km}$.

- Représenter les forces de gravité s'exerçant sur le satellite. Par une analyse qualitative, trouver les valeurs de α pour lesquelles un équilibre relatif est possible, c'est à dire pour lesquelles le satellite conserve la même orientation par rapport à la verticale (O, \vec{u}) .
- En exploitant le fait que L est très inférieur à r , montrer que le moment en C de forces de gravité s'exprime au premier ordre par

$$\vec{M}_C = -\frac{6GMmL^2}{r^3} \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}_z \quad .$$

- Le référentiel géocentrique $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est supposé galiléen et on raisonne dans le référentiel $(C, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
 - Exprimer les forces d'inertie s'exerçant sur A et sur B puis prouver que leur moment global en C est nul.
 - Écrire l'équation du mouvement régissant l'évolution de l'angle α .
 - Déterminer les positions d'équilibre relatif et discuter leur stabilité. Pour la (ou les) position(s) d'équilibre stable, exprimer la période des oscillations et la calculer numériquement.
- Reprendre le raisonnement dans le référentiel $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_z)$.

8. Forme d'une chaînette en rotation (J. Bello)

Une corde inextensible et sans raideur, de masse m et de longueur ℓ , est mise en rotation autour d'un axe passant par deux points fixes A et B en lesquels ses extrémités sont fixées (figure 5). Tous ses points tournent à la même vitesse angulaire ω constante autour de (A, \vec{u}_x) et, à un instant donné, se situent dans un même plan contenant (AB) . On peut assez facilement réaliser l'expérience en utilisant une chaînette, en la saisissant entre ses doigts à chaque extrémité et en la faisant tourner en agitant les mains d'un léger mouvement circulaire. La longueur $d = AB$ est inférieure à L et on ne suppose pas, comme on le fait dans l'étude des cordes vibrantes, que la corde est peu inclinée. Dans ces conditions, la longueur de l'élément infinitésimal situé entre les abscisses x et $x + dx$ est $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

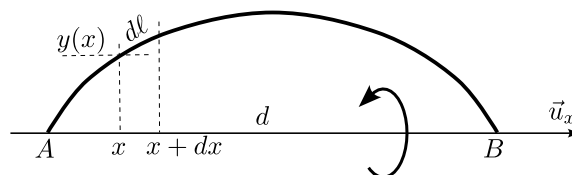


FIGURE 5 – Chaînette en rotation autour d'un axe

- En négligeant la pesanteur, trouver une équation différentielle dont la résolution permettrait de déterminer la forme de la chaînette.
- Combien de constantes interviennent dans la résolution de cette équation ? Écrire les relations permettant de les déterminer.
- La résolution numérique de ce problème peut être conduite en utilisant la fonction `odeint` du module Python `scipy.integrate`. Compléter les fonctions `construit_membre_de_droite`, `integre_longueur` et `trouve_b` du code `resolution_chainette_tournante_eleve.py`, puis l'exécuter pour résoudre le problème avec $L = 0,7 \text{ m}$ et $d = 0,5 \text{ m}$.

4. Dans quel cas limite la chaînette est-elle très peu courbée? Quel terme peut-on alors négliger dans l'équation différentielle? Dans ce cas particulier, déterminer l'expression de $y(x)$ et vérifier la concordance avec le résultat fourni par le code.

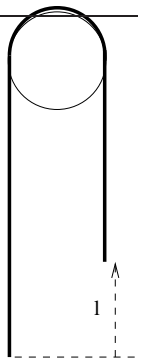
9. Expérience de Von Jolly (L. Neuf)

Pour étudier le champ de gravité au voisinage de la Terre, on réalise l'expérience suivante. À l'un des plateaux d'une balance, on suspend à la verticale l'un de l'autre deux ballons identiques liés entre deux par un fil de longueur $l = 21$ m. Le ballon supérieur est rempli d'une masse $m_1 = 5$ kg de mercure, le ballon inférieur est vide. Sous l'autre plateau on suspend un dispositif analogue dans lequel le ballon supérieur est vide et le ballon inférieur contient du mercure.

La balance étant initialement en équilibre, on permute sous chacun des deux plateaux le ballon vide et le ballon pesant. Pour rétablir l'équilibre de la balance, il faut ajouter sur l'un des plateaux une masse δm . De quel plateau s'agit-il? Que vaut δm ? Le rayon de la Terre est $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m.

10. Mouvement d'une corde pesante sur un poulie (S. Chafiai)

Une corde de longueur L et de masse m passe sur une poulie de rayon R et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}MR^2$ par rapport à son axe de rotation. On note l la différence de longueur des tronçons de corde pendant dans le vide à gauche et à droite de la poulie. À l'instant initial $l = l_0$ et l'ensemble est immobile dans le champ de pesanteur. Déterminer l'évolution ultérieure de l dans l'hypothèse où la corde ne glisse pas sur la poulie.



Diffusion et thermodynamique

11. Diffusion d'un médicament (C. Cheval)

On considère un médicament contenu dans des capsules sphériques de rayon $R = 0,1$ mm possédant une paroi perméable d'épaisseur $e = 1 \mu\text{m}$. Dans une capsule, on suppose que la densité particulaire de molécules actives reste uniforme et on la note $n_a(t)$, avec $n_a(0) = n_0 = 5 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$.

Le coefficient de diffusion des molécules actives à travers la paroi est $D = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. À travers le corps, c'est $D' = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

1. On se place en régime quasi-stationnaire. En étudiant la densité particulaire de médicament dans la paroi et autour d'une capsule, montrer que le flux de particules sortant d'une capsule vers le corps s'exprime sous la forme

$$\Phi = G n_a$$

et donner l'expression de G en fonction des paramètres du problème.

2. En déduire l'expression du nombre de molécules $N(t)$ actives diffusées vers le corps à l'instant t .
3. Combien de temps faut-il pour que 50% du médicament diffuse vers l'organisme ?
4. Combien de capsules doivent être utilisées pour que le patient absorbe 10 mmol du principe actif ?
5. L'hypothèse du régime quasi stationnaire de diffusion dans la paroi est-elle légitime ?

12. Contact entre deux barres (Mines-Télécom) (T. Collin)

Deux solides de conductivités thermiques λ_1 et λ_2 , de longueurs ℓ_1 et ℓ_2 , sont mis en contact et placés entre deux thermostats de températures T_1 et T_2 comme le montre la figure ci-dessous.



1. Déterminer le profil de température dans les deux solides. Le régime est supposé stationnaire et unidimensionnel.
2. Exprimer la température T_0 au point de contact des deux solides.
3. On donne $\lambda_{\text{peau}} = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\lambda_{\text{bois}} = 0,7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\lambda_{\text{metal}} = 350 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer et comparer les températures de contact des interfaces entre la peau et le métal, entre la peau et le bois. Vous choisirez vous-même les valeurs de ℓ_1 , ℓ_2 , T_1 et T_2 .

13. Température de contact (M. Dal Corso)

On considère ici deux solides semi-infinis de températures uniformes respectives T_1 et T_2 . On note λ_i leurs conductivités thermiques, ρ_i leurs masses volumiques et c_i leurs capacités calorifiques massiques avec $i \in \{1,2\}$. À l'instant $t = 0$, on les met en contact par le plan $x = 0$. Dès lors, leurs températures évoluent. On admet que leur interface prend une température fixe T_0 que l'on cherche à déterminer.

Pour cela, on utilise le résultat suivant : un milieu semi-infini occupant la région $x \geq 0$, de température initiale T_1 , mis en contact à $t = 0$ avec un thermostat de température T_0 , voit sa température évoluer selon

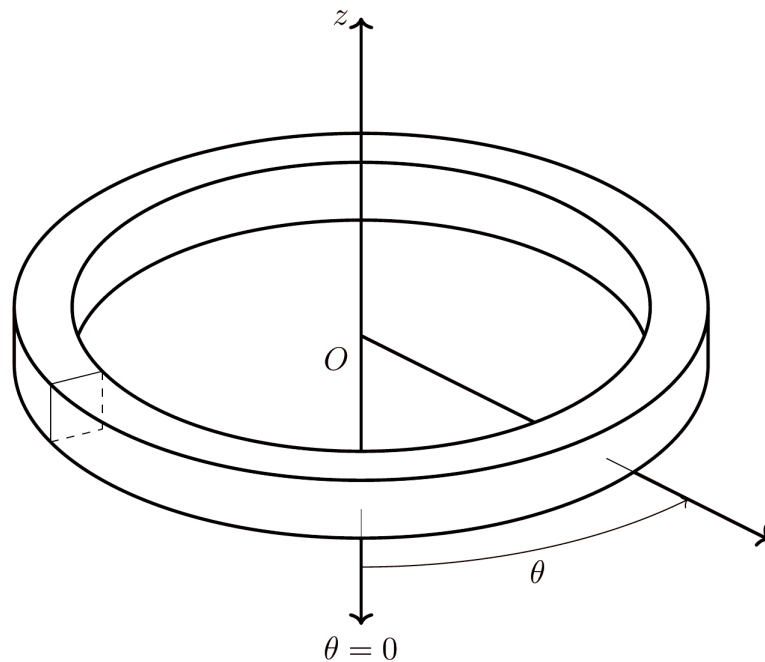
$$T(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad \text{avec} \quad \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

1. Utiliser ce résultat pour exprimer la température $T(x,t)$ dans chacun des deux matériaux.
2. En utilisant une relation de passage à l'interface $x = 0$, trouver l'expression de T_0 en fonction de T_1 , T_2 et des grandeurs $e_i = \sqrt{\lambda_i \rho_i c_i}$ nommées effusivités thermiques des deux matériaux.
3. La température des doigts est de l'ordre de 30°C . En utilisant les valeurs numériques ci-dessous, calculer et commenter la valeur de T_0 pour une main posée sur du bois et une main posée sur du marbre.

Matériau	λ (S.I.)	D ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
Bois	0,12	$5 \cdot 10^{-7}$
Marbre	3,1	$4,2 \cdot 10^{-6}$
Tissus musculaires	0,59	$1,4 \cdot 10^{-7}$

14. Expérience de Fourier (M. Dartois-Izard)

Un anneau de fer de rayon moyen R et de section carrée de côté $\ell \ll R$ est enfoui dans le sable considéré comme un isolant thermique parfait. On repère un point quelconque de l'anneau par l'angle θ dans $] -\pi, \pi]$. Pour les calculs, on se restreindra à l'ordre 1 en ℓ/R .



- À l'instant initial, le profil de température $T_0(\theta)$ dans l'anneau est non uniforme, soit T_m sa valeur moyenne.
Pour des raisons de symétrie du dispositif ayant créé ce profil initial, $T_0(\theta)$ est une fonction paire.
 - Établir l'équation de la chaleur régissant l'évolution de T . On supposera que T ne dépend que de θ et de T .
 - On pose $T(\theta, t) = T_m + f(\theta)g(t)$. Justifier l'observation faite par Fourier : *les écarts de température avec la valeur moyenne T_m deviennent rapidement proportionnels au cosinus de l'angle θ .*
Quel est l'ordre de grandeur du temps au bout duquel cette observation est valable ?
On donne $\ell = 3,3\text{cm}$, $R = 16\text{cm}$, $c = 460\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\lambda = 81\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\mu = 7,86 \times 10^3\text{kg.m}^{-3}$.
- La méthode permettant de créer l'inhomogénéité thermique initiale consiste à chauffer la position de l'anneau $\theta = 0$. Pendant cette phase de l'expérience, l'anneau est placé dans l'air à la température T_a si bien qu'un échange thermique conducto-convectif de coefficient de transfert h intervient. Après deux heures de chauffage, Fourier étudie le profil de température stationnaire obtenu $T_0(\theta)$. Pour ce faire trois thermomètres sont disposés en des points repérés par les angles θ_1 , θ_2 et θ_3 tels que $\theta_1 + \Delta\theta = \theta_2 = \theta_3 - \Delta\theta$. On pose $\Delta T_i = T_0(\theta_i) - T_a$.
 - En notant $T_0(0)$ la température du point de chauffage, déterminer l'expression de $T_0(\theta)$.
 - Fourier remarqua que le rapport $C = (\Delta T_1 + \Delta T_3)/\Delta T_2$ est indépendant de la valeur de la température $T_0(0)$ et de la valeur de θ_2 . Était-ce prévisible théoriquement ?
 - Avec $h = 10\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $\Delta\theta = \pi/4$ quelle valeur numérique prévoit-on d'obtenir pour C ? Expérimentalement, Fourier a trouvé : $\Delta T_1 = (48 + 1/3)^\circ\text{C}$, $\Delta T_2 = 33^\circ\text{C}$ et $\Delta T_3 = (26 + 1/3)^\circ\text{C}$. Comparer les valeurs de C théoriques et expérimentales.

15. Un modèle d'effet de serre terrestre (A. Fabert)

On étudie ici un modèle permettant d'estimer la température à la surface de la Terre, supposée constante et uniforme. On s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- L'atmosphère est modélisée par une couche homogène de température T_a non réfléchissante, présentant un coefficient d'absorption α_a dans le visible et $\bar{\alpha}_a$ dans l'infrarouge ;
- Le sol est modélisé par une surface opaque de température T , de coefficient d'absorption α dans le visible et égal à 1 dans l'infrarouge ; il réfléchit le rayonnement qu'il n'absorbe pas ;
- la diffusion du rayonnement solaire par l'atmosphère (nuages, aérosols, gaz, etc.) est traitée de la façon simplifiée suivante : une fraction r du rayonnement solaire φ_s incident est réfléchi vers l'espace avant de pénétrer dans l'atmosphère.

L'atmosphère et le sol sont traités comme des corps gris : par rapport à un corps noir, leur émittance est multipliée par un coefficient d'émissivité e , égal à l'absorbance α du corps pour les mêmes longueurs d'ondes.

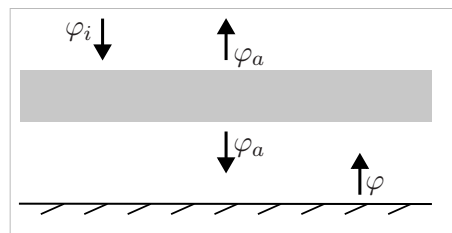
1. Le rayonnement solaire parvenant à la Terre présente une puissance surfacique de 1368 W.m^{-2} dans un plan perpendiculaire aux rayons lumineux. Dans toute la suite, on considère le flux solaire surfacique *moyen* φ_s atteignant un point quelconque de la surface terrestre et on lui attribue la valeur de 342 W.m^{-2} . Pouvez-vous justifier cette valeur ?

2. Quel est le flux surface φ_i pénétrant au sommet de l'atmosphère ?

3. On suppose que ce rayonnement incident est uniquement constitué de lumière visible, alors que ceux émis par l'atmosphère et par le sol sont dans l'infrarouge. Cela vous paraît-il raisonnable ? À quelle propriété fondamentale du rayonnement thermique ces approximations sont-elles liées ?

4. En fonction des grandeurs introduites plus haut, exprimer les coefficients de transmission τ_a et $\bar{\tau}_a$ de l'atmosphère dans le visible et dans l'infrarouge, et le coefficient de réflexion r_s du sol dans le visible.

5. La figure ci-dessous représente le flux incident, le flux φ_a émis par l'atmosphère (vers le haut et vers le bas) et le flux φ émis par le sol. La compléter en y faisant apparaître quatre flux transmis ou réfléchis et indiquer l'expression de chacun.



6. Écrire deux relations traduisant l'équilibre thermique de ce système.

7. Le modèle conduit aux expressions suivantes :

$$T = \left(\varphi_i \frac{2\alpha(1 - \alpha_a) + \alpha_a [1 + (1 - \alpha)(1 - \alpha_a)]}{(2 - \bar{\alpha})\sigma} \right)^{1/4}$$

$$T_a = \left(\varphi_i \frac{\alpha(1 - \alpha_a)\bar{\alpha}_a + \alpha_a [1 + (1 - \alpha)(1 - \alpha_a)]}{\bar{\alpha}_a(2 - \bar{\alpha}_a)\sigma} \right)^{1/4} .$$

Sans faire le calcul, expliquer comment on obtient ces expressions.

8. À partir de la figure (6), déterminer r , α , α_a , $\bar{\alpha}_a$.

9. Calculer la température de la Terre et celle de l'atmosphère. Commenter.

Données : constante de Stefan $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, constante de Wien $W = 2898 \mu\text{m.K}$.

16. Échanges entre trois sources (Centrale) (G. Fisch)

1. Donner le schéma fonctionnel d'une pompe à chaleur et indiquer le sens réel des échanges. Déterminer l'efficacité énergétique maximale et proposer une application numérique dans un cadre concret.
2. Même question pour un moteur thermique, sans l'application numérique.
3. On dispose de trois solides de même capacité calorifique C aux températures $T_{10} = 300 \text{ K}$, $T_{20} = 100 \text{ K}$ et $T_{30} = 300 \text{ K}$. Expliquer comment on peut, sans apport extérieur d'énergie, échauffer au delà de 300 K l'un des trois solides. Déterminer la température maximale que l'on peut atteindre.

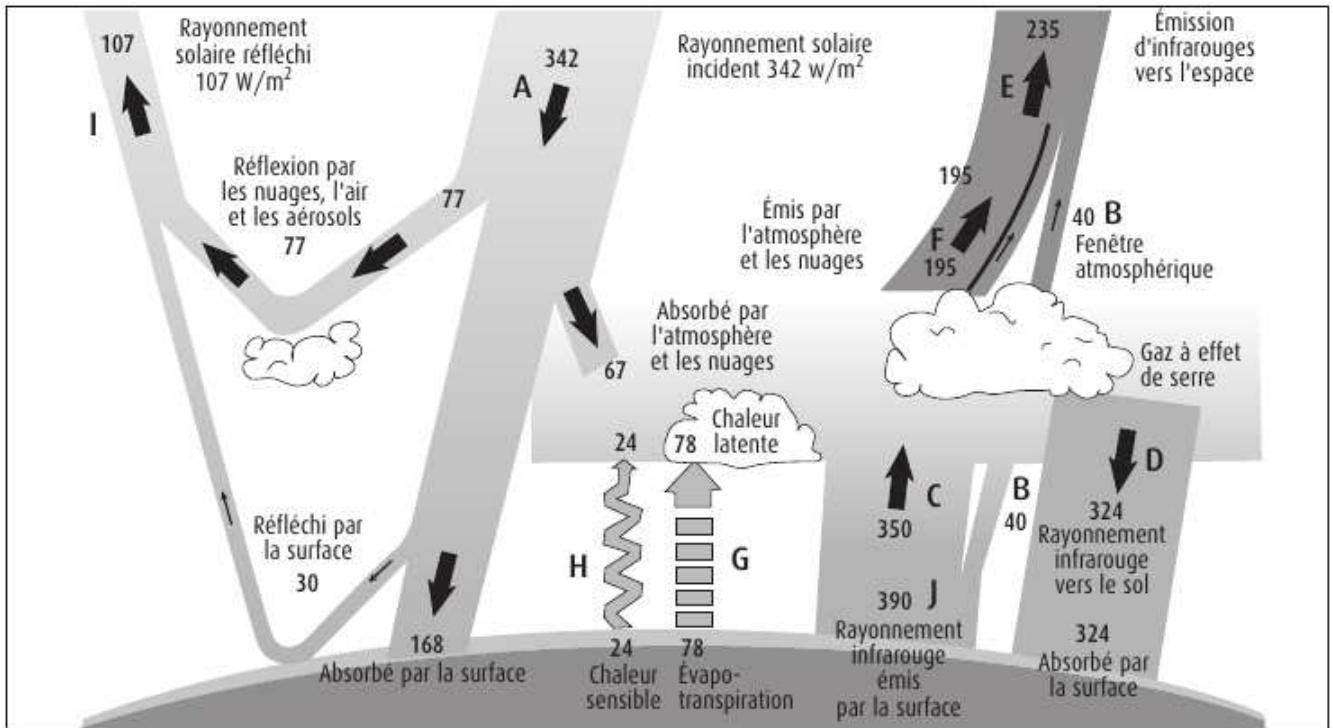


FIGURE 6 – Échanges énergétiques de la Terre en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. A : rayonnement solaire au dessus de l'atmosphère ; C : rayonnement infrarouge absorbé par l'atmosphère ; D : rayonnement émis par l'atmosphère vers la Terre ; F : rayonnement émis par les hautes couches de l'atmosphère vers l'espace.

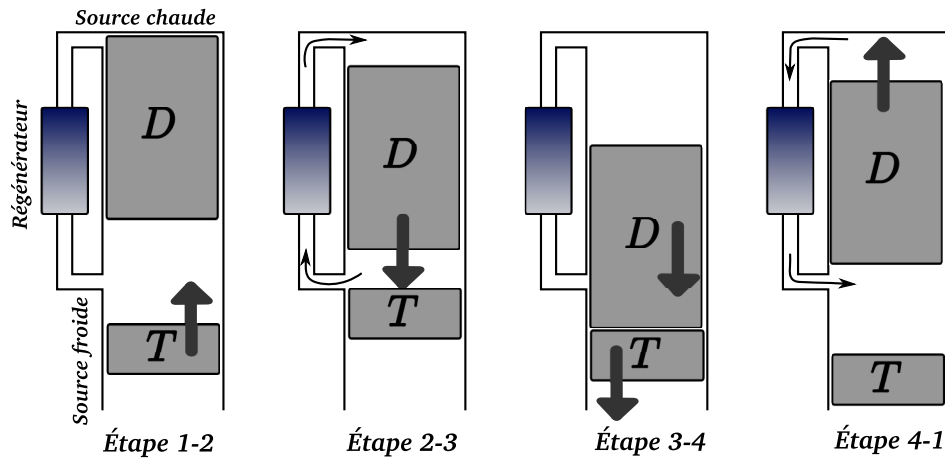
17. Congélateurs au camping (exercice très difficile!) (E. Fontaine)

Un congélateur électrique dont le thermostat a été réglé sur -13°C fonctionne sous une toile de tente. La température extérieure est de 0°C et il fait, en régime permanent, 1°C dans la tente. Un second congélateur, identique au premier et réglé de la même manière, est mis en route sous la tente. Les deux appareils décrivent des cycles de Carnot. Quelle sera la température sous la tente en régime permanent si la température extérieure demeure inchangée ?

18. Moteur de Stirling (V. Foucault)

Le moteur de Stirling est un dispositif ditherme à combustion externe. Au moyen d'un piston déplaceur D le gaz est périodiquement transvasé de la zone froide à la zone chaude et inversement. Ces transvasements s'effectuent à volume constant au travers d'un échangeur thermique appelé régénérateur. Au cours d'autres phases du cycle, le gaz échange avec un second piston T le travail utile à une machine. Dans le détail, son fonctionnement se réalise selon les quatre étapes suivantes :

- Initialement froid et détendu (volume V_1 , état 1), le gaz est comprimé de manière quasi-statique par la remontée du piston de travail, tout en restant en équilibre thermique avec la source froide de température T_1 . Il parvient ainsi à l'état 2 de volume V_2 .
- Le piston déplaceur, se translatant vers le bas jusqu'à la rencontre du piston de travail, chasse gaz vers le haut au travers du régénérateur. Le gaz s'y réchauffe jusqu'à la température T_3 de la source chaude sans changer de volume, parvenant ainsi à l'état 3.
- Le gaz chaud se détend de manière quasi-statique en repoussant les deux pistons tout en restant en équilibre thermique avec la source chaude. Il parvient ainsi à l'état 4.
- La remontée du piston déplaceur chasse le gaz vers le bas au travers du régénérateur. Il s'y refroidit jusqu'à la température T_1 sans changer de volume.



On admettra que dans les étapes de transvasement, la pression du gaz est à chaque instant la même de part et d'autre du piston déplaceur. On suppose de plus le gaz parfait. On note $\rho = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport volumérique de compression.

1. Représenter le cycle de fonctionnement dans le plan (V,P) et dans le plan (S,T) .
2. On admet ici que le régénérateur fonctionne de manière idéale, c'est à dire qu'il restitue dans l'étape 2-3 toute la chaleur que gaz lui a fournie dans l'étape 4-1. En régime permanent, seule la quantité de chaleur Q_{34} provient donc de la source chaude. Exprimer le rendement η du moteur et commenter son expression en lien avec les hypothèses.
3. En réalité, le gaz atteint dans le transvasement de bas en haut une température T'_2 légèrement inférieure à T_3 . La fin de l'étape isochore 2-3 se fait par échange direct de chaleur avec la source chaude. On définit l'efficacité du régénérateur par

$$\epsilon = \frac{T'_2 - T_1}{T_3 - T_1}$$

- (a) Placer le point 2' sur les cycles.
- (b) Par rapport à la question précédente, le travail fourni par le gaz au cours d'un cycle et la chaleur puisée dans le source chaude sont-ils modifiés ?
- (c) Montrer que le rendement s'exprime maintenant par

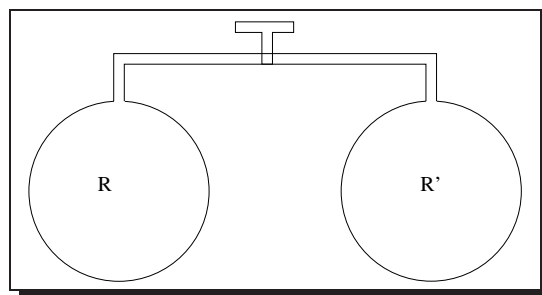
$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{(1-\zeta)(1-\epsilon)}{\ln \rho}}$$

où η_0 est le rendement obtenu dans le premier modèle. On a noté $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, $\rho = \frac{V_1}{V_2}$ et $\zeta = \frac{T_1}{T_3}$.
Comment η varie-t-il avec γ et ρ ?

- (d) Quelle serait l'expression du rendement en l'absence de régénérateur ?
- (e) Le calculer numériquement pour $T_1 = 313 \text{ K}$, $T_3 = 1023 \text{ K}$, $\epsilon = 0,8$, $\rho = 3$, $\gamma = 1,4$.

19. Transformation et transferts d'eau entre deux récipients (M. Gelinotte-Zinsius)

Deux récipients R et R' de même volume $V = 11$ sont thermostatés aux températures respectives $T = 293 \text{ K}$ et $T' = 278 \text{ K}$. Ils sont initialement vides et peuvent communiquer par un tube muni d'un robinet. On traite la vapeur d'eau comme un gaz parfait.



La pression de vapeur saturante de l'eau est donnée à chacune des deux températures :

$$P_s(T) = 2,32 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad P_s(T') = 0,88 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

- a. Le robinet étant fermé, on introduit 50 mg d'eau dans R . Préciser l'état de cette eau.
- b. On ouvre le robinet et on attend que l'équilibre s'établisse. Déterminer les quantités d'eau liquide et d'eau vapeur dans chacun des récipients.
-

20. Détendeur pour plongée sous-marine (H. Hamez-Lizzi)

Pour traiter cet exercice, on utilisera le diagramme (P,h) de l'air fourni en annexe. Les plongeurs sont équipés de bouteilles dans lesquelles l'air est stocké sous une pression de 200 bar à température ambiante $T = 20^\circ\text{C}$. Pour permettre la respiration, on le détend jusqu'à une pression voisine de 1 bar

1. Le passage dans le détendeur est lent, adiabatique, et ne met en jeu aucune hélice, l'air s'écoulant simplement au travers de petits orifices. Déterminer la température de l'air obtenu à l'entrée des voies respiratoires.

2. En réalité, la détente s'effectue en deux étapes analogues à la précédente. Dans un détendeur primaire placé sur la bouteille, le gaz se détend jusqu'à une pression de 10 bar. Puis, circulant dans un tuyau, il se réchauffe jusqu'à la température ambiante à pression constante. Enfin, dans un détendeur secondaire placé près de la bouche du plongeur, il se détend jusqu'à la pression de 1 bar.

- (a) Quelle est la température de l'air à l'entrée des voies respiratoires ?
- (b) Quel volume d'air respirable obtient-on à partir d'une bouteille de 13 litres.
- (c) Quel quantité de chaleur est prélevée dans le milieu ambiant pour un litre d'air respiré ?
- (d) Quelle est l'entropie créée pour chaque gramme d'air extrait de la bouteille ?

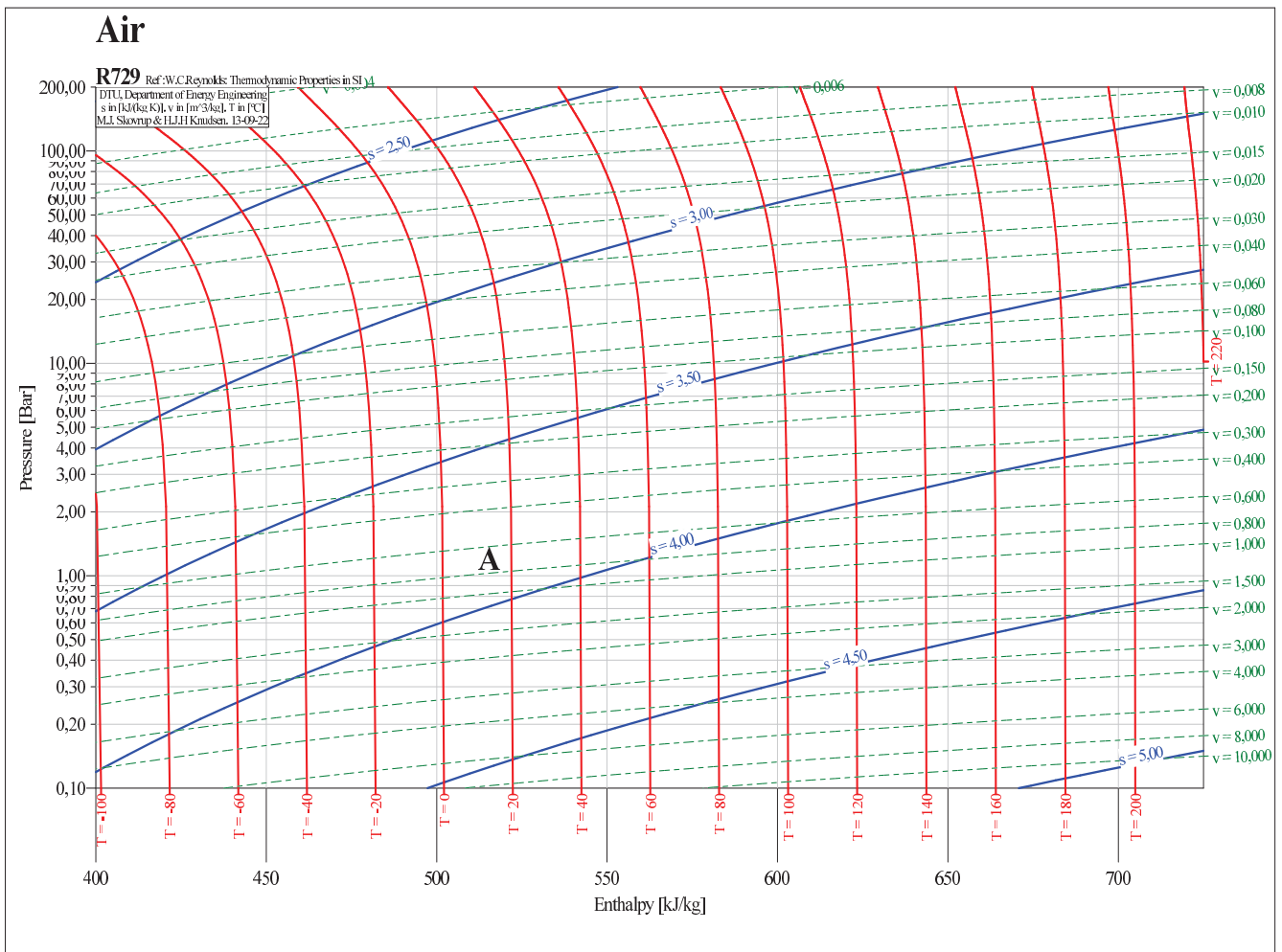


FIGURE 7 – Diagramme (P,h) de l'air

21. Détente de Joule-Thomson de l'eau (A. Haumonté)

On fait subir à de l'eau une détente de Joule Thomson. En amont, la température est $T_1 = 130$ °C et la fraction massique en eau liquide est x_1 . En aval la pression est $P_2 = 1,0135 \cdot 10^5$ Pa. Pour déterminer l'état de l'eau en aval, vous pourrez utiliser le diagramme de Mollier de l'eau (un exemplaire a été distribué en cours) mais les applications numériques seront effectuées avec les valeurs fournies dans le tableau 1.

1. Rappeler en quoi consiste une détente de Joule-Thomson et quelle est sa propriété essentielle.
2. On suppose le mélange en aval diphasé. Exprimer le titre en liquide sortant x_2 en faisant intervenir les valeurs du tableau. Le calculer numériquement pour $x_1 = 0,10$.
3. Se peut-il que l'eau en aval soit entièrement en phase liquide? en phase vapeur? À quelle condition sur x_1 obtient-on effectivement en aval un mélange diphasé?
4. Même question pour $x_1 = 0,015$.
5. Calculer l'entropie massique créée dans chacun des deux cas précédents. On pourra utiliser l'identité thermodynamique $dH = TdS + VdP$.

T °C	P_{sat} (bar)	h_l (kJ/kg)	h_v (kJ/kg)	s_l (kJ/kg/K)	s_v (kJ/kg/K)	c_{pl} (kJ/kg/K)	c_{pv} (kJ/kg/K)
100	1.0135	419	2676	1,307	7,355	4,19	2,03
130	2,701	546	2720	1,634	7,027	4,23	2,17

TABLE 1 – Extraits de tables thermodynamiques concernant l'eau (<http://www.thermexcel.com/>)

22. Échangeur à co-courant (L. Hayouni)

Un échangeur permet d'effectuer des transferts thermiques entre deux fluides sans les mélanger. Pour cela, on les fait circuler dans deux canalisations distinctes séparées l'une de l'autre par un matériau présentant une grande conductivité thermique. Dans la configuration étudiée ici, le fluide 1 s'écoule dans un tuyau cylindrique et le fluide 2 dans une canalisation annulaire entourant la précédente. Les deux fluides se déplacent dans le même sens et l'échangeur est dit « à co-courant » (figure 8). La paroi extérieure est calorifugée.

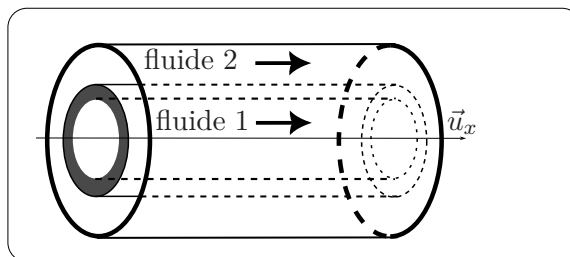


FIGURE 8 – Échangeur à co-courant

On note c_{pi} la capacité calorifique du fluide d'indice i , D_i son débit massique et $T_i(x)$ sa température à l'abscisse x . On délimite par la pensée une section de l'échangeur située entre les abscisses x et $x + dx$. Dans cette portion infinitésimale, le fluide 2 (extérieur) cède au fluide 1 (intérieur) une puissance thermique

$$d\mathcal{P} = g(T_2(x) - T_1(x)) dx \quad .$$

1. Le fluide 1 situé entre les abscisses x et $x + dx$ constitue un système ouvert. En lui appliquant le premier principe, établir une expression de dT_1/dx .
2. Trouver de la même manière une expression de dT_2/dx .
3. On note $\Delta T(x) = T_2(x) - T_1(x)$. Justifier que

$$\Delta T(x) = \Delta T(0) e^{-x/\ell}$$

et donner l'expression de ℓ .

4. Déterminer les expressions de $T_1(x)$ et $T_2(x)$ en faisant notamment intervenir les valeurs initiales $T_1(0)$ et $T_2(0)$.
5. Une laiterie utilise un échangeur de ce type pour échauffer le lait (fluide 1) à partir d'un flux d'eau chaude (fluide 2). On donne $T_1(0) = 20^\circ\text{C}$, $T_2(0) = 85^\circ\text{C}$, $c_1 = 3,8 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $c_2 = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $D_1 = 0,052 \text{ kg.s}^{-1}$ et $D_2 = 0,3 \text{ kg.s}^{-1}$, $g = 62,6 \text{ W.K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer numériquement ℓ , les limites de T_1 et T_2 pour $x \rightarrow \infty$, puis utiliser un ordinateur pour tracer les graphes de $T_1(x)$ et $T_2(x)$.
6. Pour éliminer les bactéries présentes dans le lait, on souhaite le porter à la température de 70°C . Quelle longueur ℓ faut-il donner à l'échangeur ?
7. Après avoir circulé dans l'échangeur, l'eau traverse un brûleur afin de la ramener à la température $T_2(0)$. Quelle puissance ce brûleur doit-il fournir à l'eau ?

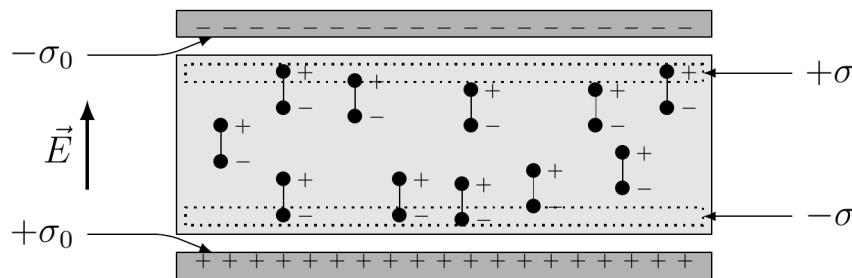
Électromagnétisme

23. Hygromètre capacitif (D. Hoffmann)

Pour mesurer l'humidité de l'air, on peut mettre à profit le fait que la présence de molécules d'eau dans le diélectrique séparant les plaques d'un condensateur en modifie la capacité.

1. Rappeler les hypothèses usuelles de l'étude d'un condensateur plan, l'expression du champ électrique E_0 et celle de sa capacité C_0 lorsque le diélectrique est assimilé au vide. On notera $\pm\sigma_0$ la charge surfacique des plaques et on introduira les paramètres géométriques nécessaires.

2. En présence d'air humide, l'espace séparant les plaques se peuple de molécules d'eau de moment dipolaire moyen \vec{p}_m aligné sur la direction du champ électrique, présentes au nombre de n par unité de volume. Dans le volume de l'isolant, les charges positives et négatives constituant ces dipôles se compensent deux à deux, mais ce n'est pas le cas sur les faces supérieure et inférieure, où on voit donc apparaître des charges surfaciques, appelées charges de dépolarisation, avec une densité $\pm\sigma$.



Exprimer de deux manières le moment dipolaire total du milieu isolant en fonction de n et des paramètres géométriques introduits dans la question précédente. En déduire l'expression de σ en fonction de p_m et n .

3. Le moment dipolaire moyen p_m est lié au champ électrique par la relation $\vec{p}_m = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$. Comment se nomme α et quelle est sa dimension ?

4. Trouver l'expression du champ électrique E puis de la capacité C en présence de vapeur d'eau. On exprimera C en fonction de C_0 , n et α .

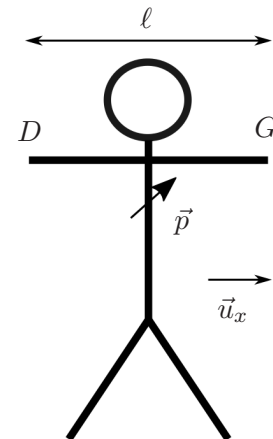
24. Condensateur cylindrique (A. Jenn)

Un condensateur est formé de deux cylindres coaxiaux en métal de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, de longueur ℓ et séparés l'un de l'autre par de l'air. Les cylindres intérieur et extérieur portent respectivement les charges électriques Q et $-Q$. En négligeant tout effet de bord, trouver l'expression du champ électrique entre les deux cylindres puis en déduire la capacité de ce condensateur.

25. Électrocardiogramme (F. Junot-Robin)

Les battements du cœur mettent en jeu des mouvements d'ions et des phénomènes de polarisation électrique. On peut donc détecter l'activité cardiaque en mesurant les différences de potentiel associées à ces phénomènes, et ainsi obtenir un électrocardiogramme (ECG).

Dans un modèle rudimentaire, on modélise le cœur par un dipôle de moment dipolaire $\vec{p}(t)$ dont la norme et l'orientation se modifient périodiquement au fil du temps (figure 9). Un ECG complet comporte 12 signaux, mais ici on s'intéresse uniquement à la différence de potentiel $U = V_G - V_D$ mesurée entre le poignet droit et le poignet gauche, disposés symétriquement à la même distance r du cœur et séparés l'un de l'autre d'une distance ℓ .



1. Exprimer $U(t)$ en fonction des paramètres du problème et de la projection p_x de \vec{p} sur \vec{u}_x . On pourra utiliser l'expression du potentiel dipolaire sous la forme $V(M) = \vec{p} \cdot \vec{OM} / (4\pi\epsilon_0 OM^3)$.

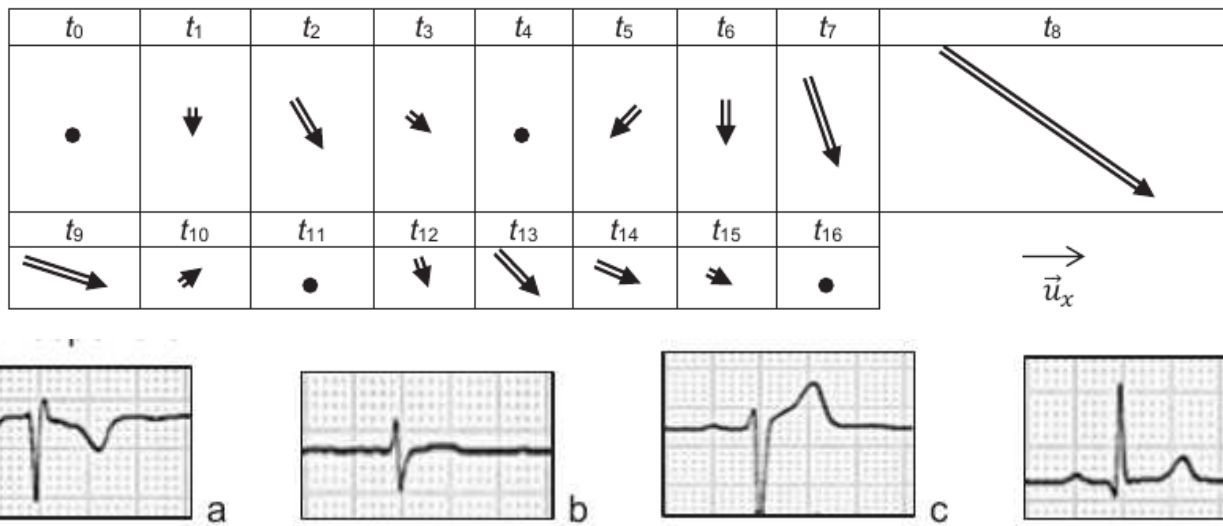


FIGURE 9 – Évolution du dipôle cardiaque et signaux d'électrocardiogramme

2. La figure 9 représente d'une part l'évolution de \vec{p} au fil du temps, et d'autre part quatre des douze signaux d'un ECG. À laquelle des quatre courbes (a), (b), (c) et (d) la tension U_1 correspond-elle ?

26. Champ magnétique dans un câble coaxial (N. Lakouanane)

Un câble coaxial est constitué par un conducteur cylindrique plein de rayon a , appelé « âme », entouré par un conducteur externe occupant l'espace compris entre les cylindres de rayons b et c , appelé « gaine » (avec $a < b < c$). Un courant d'intensité I circule dans l'âme parallèlement à l'axe de révolution du cylindre. Dans la gaine, un courant de même intensité I circule en sens inverse. On suppose que ces courants se répartissent uniformément sur la section des deux conducteurs.

1. Déterminer le champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace et représenter ses variations.
2. On suppose dorénavant que b et c sont très proches de manière à négliger la contribution de la gaine aux grandeurs à calculer. Exprimer l'énergie magnétique emmagasinée dans un tronçon de longueur h de ce câble.
3. En déduire l'inductance Λ par unité de longueur de ce câble. La calculer numériquement pour $a = 0,48$ mm et $b = 1,48$ mm.

27. Inductance propre et effet de peau (M. Léger)

On utilise généralement le concept d'inductance propre pour caractériser les propriétés magnétiques des circuits filiformes. Cependant, un fil même très fin possède un certain diamètre et on peut s'interroger sur le champ magnétique qui règne à l'intérieur de ce fil et sur ses effets. En régime alternatif, ce champ et la densité volumique de courant associée sont soumis à l'effet de peau : le courant se concentre près de la surface du métal et ne circule presque plus dans son cœur. Pour étudier ce phénomène, on considère dans un premier temps une pièce métallique de conductivité γ occupant le demi-espace $z \geq 0$ et dans laquelle le courant électrique circule dans la direction de \vec{u}_x . On admet que le champ électrique y est donné par

$$\vec{E}(z,t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} .$$

1. On considère un segment de longueur ℓ tracé à la surface du conducteur et colinéaire à \vec{u}_y . Exprimer l'intensité $I(t)$ qui traverse la section droite perpendiculaire à \vec{u}_x et située « sous » ce segment, c'est à dire la surface définie $x = Cste$, par $0 \leq y \leq \ell$ et $z \geq 0$.
2. On considère maintenant un rectangle tracé à la surface du métal dont les côtés ont pour longueurs ℓ (selon \vec{u}_y) et h (selon \vec{u}_x). Déterminer l'énergie magnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_m \rangle$ stockée dans le volume de métal situé « sous » ce rectangle, c'est à dire dans la région définie par $0 \leq y \leq \ell$, $0 \leq x \leq h$, $z \geq 0$ (on parle d'une moyenne temporelle).

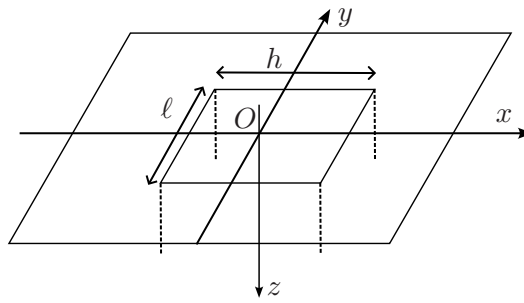


FIGURE 10 – Métal semi-infini

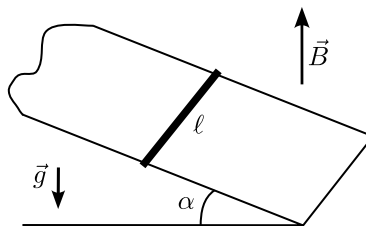
3. Comment s'exprime usuellement l'énergie magnétique moyenne $\langle \mathcal{E}_m \rangle$ stockée dans une bobine d'auto-inductance L parcourue par un courant périodique d'intensité $I(t)$? On convient d'utiliser cette relation comme *définition* de l'auto-inductance de la partie du métal considérée dans la question précédente. En déduire l'expression de L en fonction de h , ℓ , μ_0 et δ .

4. Le phénomène étudié ici intervient notamment dans l'inductance parasite des câbles coaxiaux. Considérons un fil électrique cylindrique de rayon a et de conductivité γ parcouru par un courant de pulsation ω . L'étude mathématique de cette situation invariante par rotation devrait se faire en coordonnées cylindriques. À quelle condition peut-on approximativement utiliser les résultats précédents reposant sur une géométrie plane? Exprimer dans ce cadre l'inductance propre d'un tronçon de fil de longueur h . Comment varie-t-elle avec ω ?

5. On considère un fil de cuivre caractérisé par $a = 1,48\text{ mm}$ et $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$. Dans quel intervalle de fréquences l'approximation de la question précédente est-elle valide? Calculer l'inductance propre de ce conducteur pour $h = 100\text{ m}$ et une fréquence acceptable accessible avec un GBF disponible dans un lycée.

28. Rails de Laplace inclinés (A. Loisy)

Une barre conductrice de longueur ℓ et de résistance électrique R forme un circuit fermé avec deux rails parallèles et un fil de cuivre de résistances négligeables. Ces rails sont disposés parallèlement l'un à l'autre selon la ligne de plus grand pente d'un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. La barre leur est perpendiculaire et peut glisser sans frottement à leur contact. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur et dans un champ magnétique constant uniforme vertical \vec{B} .



Étudier le mouvement de la barre abandonnée sans vitesse initial à la surface des rails. Procéder à un bilan énergétique.

29. Micro pour guitare électrique (P. Mancini)

Pour traiter cet exercice, on utilisera le fait qu'un objet en acier possède des propriétés particulières. Plongé dans un champ magnétique créé par d'autres sources (courants électriques ou aimants), il s'aimante et la carte champ magnétique, tout comme sa valeur numérique en chaque point, se trouvent modifiées par la présence de cet objet.

Les guitares électriques comportent un transducteur qui produit un signal électrique à partir du mouvement des cordes. Ce signal est ensuite envoyé à un amplificateur puis à un haut parleur pour produire un son. En français, ce transducteur est par abus de langage appelé « micro », mais on emploie parfois l'anglicisme « pickup » pour le désigner car il ne s'agit pas à proprement parler d'un microphone. En effet, ce n'est pas la vibration de l'air qu'il détecte, mais celle de la corde.

On distingue deux familles de « micro » : les micros piézoélectriques d'une part et les micros magnétiques d'autre part. Ce sont les seconds que nous étudions ici. Un micro magnétique est constitué de petits aimants cylindriques droits d'axe polaire parallèle à l'axe du cylindre, chacun d'eux placé juste sous une corde en acier de la guitare. Sur ces aimants est enroulée une bobine détectrice formée d'un fil conducteur et dont les extrémités sont connectées à des câbles.

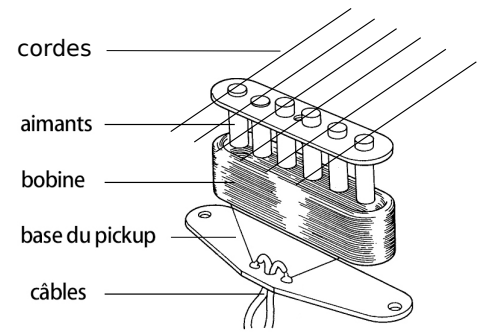


FIGURE 11 – Micro magnétique pour guitare électrique

1. Expliquer comment ce dispositif permet d'obtenir un signal électrique aux bornes de la bobine à partir du mouvement des cordes.
2. Pour sonoriser un instrument de musique (une guitare sèche par exemple), on peut aussi utiliser de véritables microphones qui captent *le son* produit par la corde, mais ils donnent parfois lieu à un effet Larsen gênant. Connaissez-vous ce phénomène ? Analyser son apparition éventuelle avec les « micros » magnétiques.
3. Lorsque l'appareil est utilisé près d'une installation électrique (ce qui est presque toujours le cas, puisque chaque bâtiment est aujourd'hui équipé de l'électricité), les bobines produisent un signal même en l'absence de mouvement des cordes, c'est à dire quand le musicien ne joue pas, et cela produit un bourdonnement parasite désagréable dans les haut-parleurs. Pouvez-vous expliquer ce phénomène ?
4. Pour éviter ce désagrément, on remplace chaque aimant par une paire d'aimants dont les axes sont parallèles mais les pôles inversés, et on dispose une bobine autour de chacun d'eux. Les deux bobines sont placées en série et le sens d'enroulement du fil est inversé de l'un à l'autre. La figure ci-dessous représente schématiquement la situation avec une seule paire d'aimants (correspondant à une seule corde) et la photographie montre le dispositif complet formé de 6 paires, appelé « humbucker ».



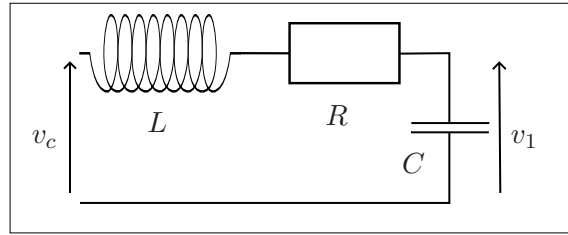
FIGURE 12 – À gauche : principe d'un « micro » à double bobinage. À droite : photographie d'un humbucker pour 6 cordes.

Expliquer comment ce système supprime le ronronnement parasite tout en détectant la vibration de la corde.

5. Dans cette question, on se limite à un seul micro au lieu de 6 et on se place dans le cas d'un bobinage simple et non pas double. On a donc affaire à un seul aimant et un seul bobinage qu'on modélise par un solénoïde infini de rayon $r = 2,184 \text{ mm}$ et de longueur $\ell = 10 \text{ mm}$. Combien de tour doit comporter la bobine pour atteindre une inductance propre $L = 5 \text{ H}$? Pour ce calcul, on remplacera la perméabilité magnétique du vide μ_0 par celle de l'acier $\mu = 8,75 \cdot 10^{-4} \text{ H.m}^{-1}$.
6. Pour fabriquer la bobine, on utilise un fil de cuivre très fin¹ de diamètre $d = 0,056 \text{ mm}$ et de conductivité $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Déterminer la résistance R de la bobine.
7. En réalité, la bobine fait le tour des 6 aimants et sa résistance est $R = 6 \text{ k}\Omega$. Les différentes spires de la bobine, placées les unes contre les autres, se comportent comme de minuscules condensateurs et confèrent à la bobine une capacité parasite $C = 100 \text{ pF}$. Le modèle complet de la bobine est représenté ci-dessous. La tension

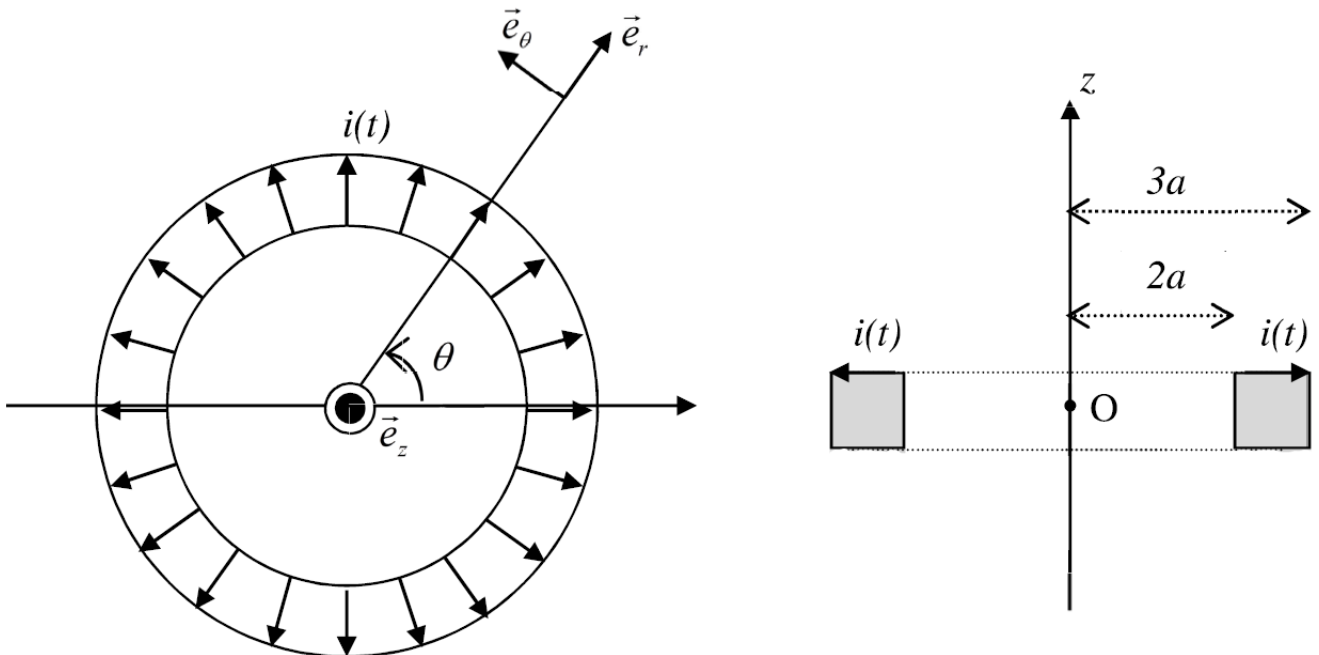
1. de type American Wire Gauge 43

v_c est due au mouvement de la corde et la tension v_1 est celle qu'on envoie vers l'amplificateur. Étudier en fonction de la fréquence la relation liant v_c à v_1 . Commenter en lien avec l'application à la guitare électrique.



30. Pince ampèremétrique (É. Mihic)

Une pince ampèremétrique est schématiquement composée de N spires carrées de côté a placées en série, de résistance totale R et disposées sur un tore dont les rayons intérieurs et extérieurs sont respectivement égaux à $2a$ et $3a$. Ce circuit est fermé sur un ampèremètre d'impédance négligeable. Sur l'axe de révolution (Oz) de ce tore se trouve un fil rectiligne, supposé infini, dans lequel circule un courant d'intensité $I = I_0 \cos(\omega t)$.

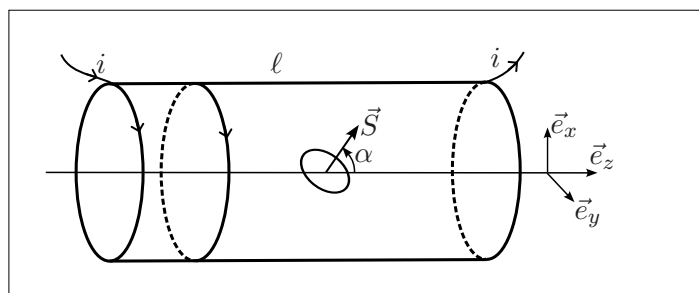


Montrer que la mesure de l'intensité i circulant dans les spires permet d'accéder à I_0 . Établir, en fonction de la pulsation et des caractéristiques du dispositif, le lien entre les deux intensités. Quel est l'intérêt pratique d'un tel système ? Quelles en sont les limitations ?

31. Rotation d'un aimant dans un solénoïde (S. Ory)

On considère un solénoïde de longueur ℓ , de rayon $a \ll \ell$, possédant n spires par unité de longueur, dont les extrémités ont été reliées par un fil de manière à former un circuit fermé de résistance R (ce fil n'est pas représenté sur la figure). On note i l'intensité qui le parcourt.

1. Une petite spire d'aire S est introduite dans le solénoïde et orientée de telle manière que sa normale forme un angle α avec l'axe de révolution \vec{e}_z du solénoïde. Exprimer l'inductance propre du solénoïde et le coefficient de mutuelle induction M entre les deux circuits.



2. La spire précédente est retirée. On la remplace par un aimant permanent de moment dipolaire magnétique \mathcal{M} orienté de la même manière que S dans la situation précédente. Un opérateur l'entraîne en rotation à la vitesse angulaire constante ω autour de \vec{e}_y de manière que le vecteur \vec{M} tourne dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_z) . L'angle (\vec{e}_z, \vec{M}) s'identifie donc à $\alpha = \omega t$. Déterminer, en régime sinusoïdal forcé, l'intensité $i(t)$ qui circule dans le solénoïde. On posera $A = \mu_0 n \mathcal{M} / L$ et $\tau = L / R$. Quelle est la dimension de A ?

3. Exprimer le couple $\vec{\Gamma}_{\text{op}}$ que l'opérateur exerce pour maintenir constante la vitesse de rotation de l'aimant, puis sa valeur moyenne dans le temps.

4. Analyser méticuleusement la situation d'un point de vue énergétique.

32. Étude d'un résonateur microondes (C. Poussardin)

Dans les installations micro-ondes, on utilise parfois le dispositif représenté sur la figure 13, formé de deux portions de cylindres coaxiaux. À leur base, il sont connectés l'un à l'autre par une plaque en forme de couronne occupant l'espace compris entre les cercles de rayons b et a . À leurs sommets, chacun d'eux est fermé par disque, un espace vide de largeur d séparant le disque supérieur du disque inférieur. L'ensemble est formé d'un métal de très haute conductivité. Le long du cylindre central circule un courant d'intensité $I(t)$; il se dirige vers la surface du disque de rayon b , qui porte à sa surface la charge $Q(t)$.

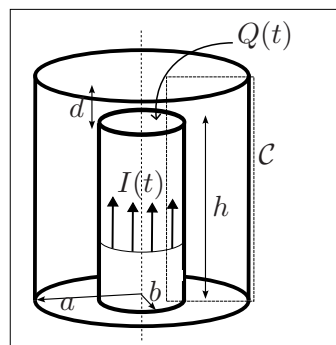


FIGURE 13 – Résonateur micro-ondes

Ce phénomène relève de l'électromagnétisme des régimes variables et on le traite avec les hypothèses suivantes :

- dans la région (1) de hauteur h comprise entre les cylindres de hauteurs b et a , la situation est de type quasi-magnétostatique (ARQS magnétique) ;
- dans la région (2) de hauteur d située au dessus du disque de rayon b , la situation est de type quasi-électrostatique (ARQS électrique). Comme d est très petit, on néglige les effets de bord associés au caractère fini de b .

1. Exprimer le champ magnétique dans la région (1).
2. Exprimer le champ électrique dans la région (2).
3. Appliquer la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday au contour \mathcal{C} . À l'exception du tronçon vertical de longueur d , il se situe à l'intérieur du métal dont la conductivité est supposée infinie et où, par conséquent, le champ électrique supposé nul.
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par $Q(t)$ et identifier une pulsation propre.
5. Exprimer $Q(t)$ et $I(t)$ (à deux constantes d'intégration près) et décrire le comportement du système.
6. À quelles conditions les ARQS sont-elles légitimes ?
7. Analyser la situation d'un point de vue énergétique.

33. Champ créé par un fil semi-infini (A. Quaneaux)

Un fil rectiligne occupe la demi-droite d'équations cartésiennes $(x = 0, y = 0, z \leq 0)$. Il est parcouru par un courant d'intensité i constante orienté dans le sens des z croissants et s'interrompt brutalement à l'origine O des coordonnées.

1. Cette situation correspond-elle à un régime stationnaire de transport de charges électriques ? Pourquoi ?

2. On note $Q(t)$ la charge supposée ponctuelle portée par le point O . Quel est le lien entre Q et i ?
3. On introduit des coordonnées sphériques ; on admet que $E_\theta = 0$ et que les composantes de E ne dépendent pas de θ . Déterminer les directions de \vec{E} et \vec{B} .
4. Exprimer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$.
5. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$.
6. Analyser le comportement de \vec{B} pour $\theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \pi/2$ et $\theta \rightarrow \pi^-$. On remarquera que $r \sin \theta$ (noté ρ) représente la coordonnée cylindrique usuelle.
7. La forme du champ électrique est-elle compatible avec l'équation de Maxwell-Faraday ?
8. Exprimer le vecteur de Poynting et vérifier que, pour $\theta \rightarrow \pi$,

$$\vec{R} \simeq \frac{QI}{8\pi\epsilon_0 r^2 \rho} \vec{u}_\rho \quad .$$

9. La région quasi-ponctuelle portant la charge $Q(t)$ est en réalité une boule de rayon a . Calculer l'énergie associée à la présence du champ électrique dans l'espace entourant cette boule.
10. Exprimer la puissance sortant du fil portant le courant électrique et commenter le bilan énergétique.

34. Aimantation d'un cristal anisotrope (H. Recouvreur)

On considère un échantillon de volume V d'un matériau magnétique, tel le fer ou le néodyme, constitué de N atomes portant chacun un moment dipolaire $\alpha\mu_B$, où α est un nombre sans dimension positif et μ_B le magnéton de Bohr. On néglige l'agitation thermique et on admet que tous ces moments dipolaires s'orientent parallèlement les uns aux autres, dans le même sens qu'un vecteur unitaire \vec{u} .

1. Exprimer le vecteur aimantation \vec{M} (c'est à dire le moment dipolaire magnétique volumique) de l'échantillon. On notera M_s sa norme.
2. On plonge l'échantillon dans un champ magnétique externe $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Justifier que cela entraîne une réorientation de \vec{u} et déterminer à l'équilibre la valeur de l'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u})$, en discutant selon le signe de B et en précisant la stabilité de cet équilibre.
3. Dans certains cristaux anisotropes, l'alignement des dipôles se produit plus facilement le long de certaines directions. On envisage ici une situation où cette direction privilégiée est colinéaire à \vec{B} , c'est à dire selon \vec{u}_z . Pour modéliser ce comportement, on introduit une énergie potentielle d'anisotropie pour laquelle on propose deux expressions :

$$E_p^{(an)} = KV \sin^2 \theta \quad \text{ou bien} \quad E_p^{(an)} = KV \cos^2 \theta \quad \text{avec} \quad K > 0.$$

Laquelle des deux formes faut-il choisir pour exprimer le fait qu'à équilibre stable, en l'absence de champ extérieur \vec{B} , l'aimantation tend à s'orienter selon \vec{u}_z ?

4. Exprimer en fonction de V , M_s , K , B et θ l'énergie potentielle E_p du cristal, tenant compte à la fois de la présence de \vec{B} et de l'effet d'anisotropie. Ses variations en fonction de θ sont représentées sur la figure (14). Déterminer la valeur critique B_c de $|B|$ qui sépare les courbes présentant deux extremums de celles qui en présentent quatre.
5. Quelles sont, selon la valeur de B , les valeurs accessibles à θ à l'équilibre stable (les valeurs $-\pi$ et π désignent une seule et même position, il est inutile de la répéter) ?
6. On fait varier le champ magnétique B lentement, de manière sinusoïdale, entre $-B_{\max}$ et B_{\max} , avec $B_{\max} > B_c$. L'évolution est quasi-statique : l'angle θ prend à tout instant la valeur d'équilibre stable la plus proche de celle qui prévalait juste avant. Tracer sur un graphe les variations de B et celles de θ au cours du temps. On prendra soin de bien repérer les instants pour lesquels θ subit une discontinuité.
7. Représenter maintenant dans le plan (B, M) les variations de B et de la projection de $M_z = M_s \cos \theta$ de M sur \vec{u}_z . Indiquer par des flèches le sens de parcours de cette courbe. Voyez-vous pourquoi on parle de « cycle d'hystérésis » ?

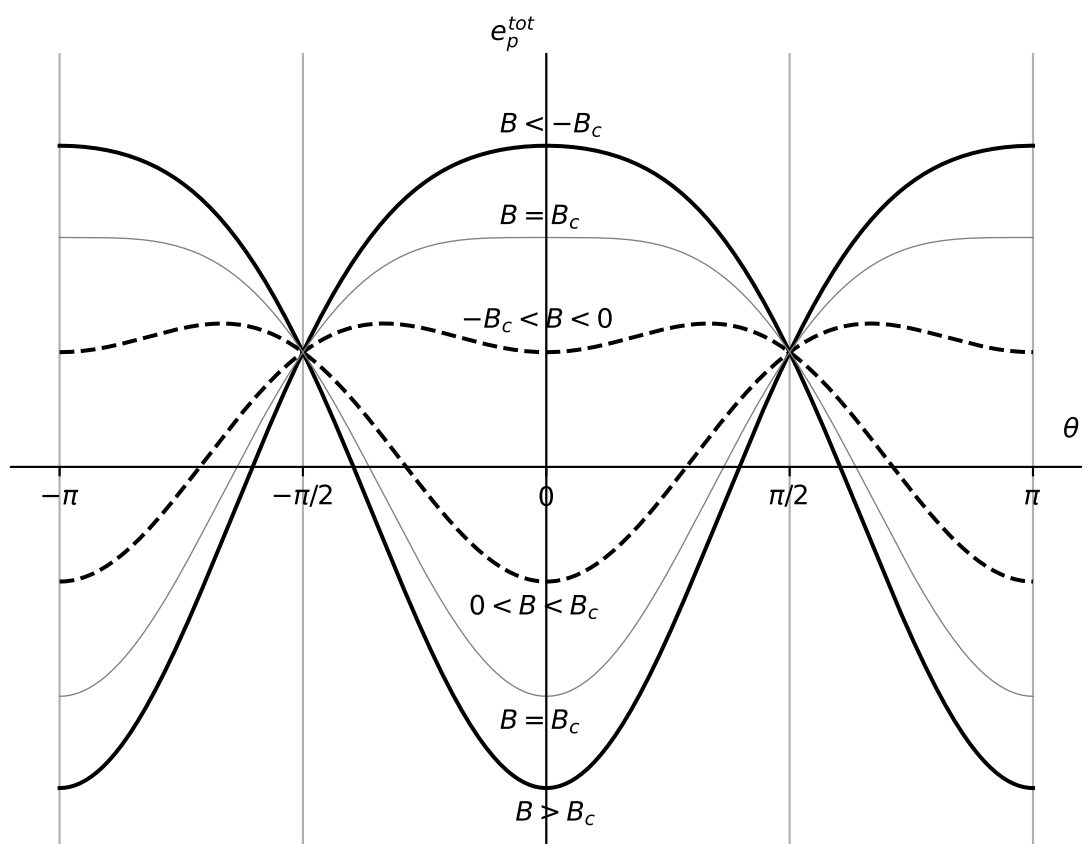
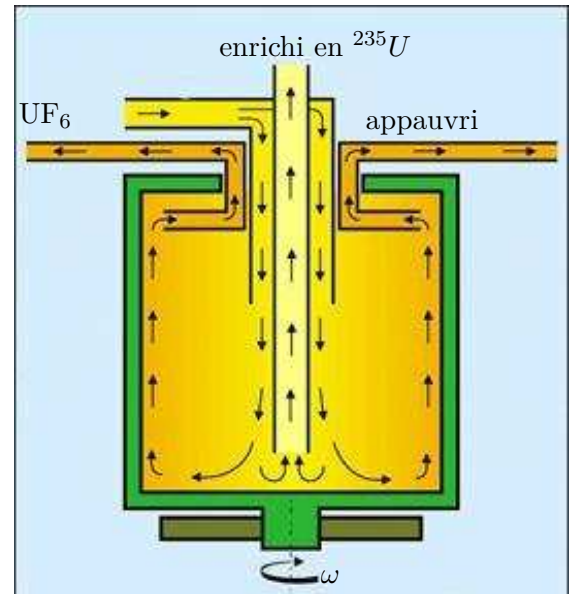


FIGURE 14 – Énergie potentielle magnétique d'un cristal anisotrope plongé dans un champ B

Mécanique des fluides

35. Séparation d'isotopes par centrifugation (V. Rinaldi)

L'uranium naturel se présente comme un mélange des deux isotopes ^{238}U et ^{235}U avec des fractions massiques de 0,993 et 0,007. Seul l'uranium 235 est fissile et il est nécessaire d'en augmenter la proportion, jusqu'à quelques pourcent pour les applications civiles et quelques dizaines de pourcent pour les armes nucléaires. La méthode d'enrichissement la plus utilisée aujourd'hui est la centrifugation. Des vapeurs d'hexafluorure d'uranium UF_6 sont introduites dans un cylindre en rotation autour de son axe de symétrie. Les molécules les plus lourdes s'accumulent près des parois et les molécules les plus légères près de l'axe. De plus, le gaz circule dans la centrifugeuse, permettant l'aspiration de la partie enrichie en ^{235}U au bas du cylindre et de celle appauvrie en haut. Comme l'enrichissement obtenu ainsi est très faible, il est nécessaire d'utiliser les milliers de centrifugeuses en cascade afin d'atteindre les pourcentages souhaités.



Pour estimer l'efficacité du procédé, on adopte un modèle très simplifié en supposant que le gaz se trouve en équilibre dans le référentiel de la centrifugeuse, en rotation uniforme de vitesse angulaire ω par rapport au référentiel du laboratoire.

1. Pour l'instant on suppose qu'un unique gaz parfait de masse molaire M se trouve dans la centrifugeuse. Déterminer le champ de pression $p(r)$ et la densité particulaire $n(r)$, r désignant le coordonnée cylindrique usuelle. On notera p_0 et n_0 leurs valeurs sur l'axe, et T la température, supposée uniforme.
2. On admet que l'expression obtenue pour $n(r)$ s'applique séparément à $^{238}\text{UF}_6$ (densité particulaire n_1) et $^{235}\text{UF}_6$ (densité particulaire n_2), avec bien sûr des valeurs de n_0 distinctes. Exprimer le rapport d'enrichissement

$$q = \frac{n_2(0)/n_1(0)}{n_2(r)/n_1(r)}$$

en fonction de R , T , r , ω et des masses molaires M_1 et M_2 .

3. Application numérique : $r = 15$ cm, $\omega = 50000$ tour/min, $R = 8,314$, $T = 300$ K, $M_1 - M_2 = 3,0$ g.mol $^{-1}$. Calculer q . En admettant que q s'identifie au rapport des compositions isotopiques de deux centrifugeuses successives, combien d'étapes faudrait-il pour atteindre un taux d'uranium 235 de 20% ? Expliquer pourquoi plusieurs milliers de centrifugeuses en cascade sont en réalité nécessaires.

36. Forme hydrostatique de la Terre : ellipsoïde de Mac Laurin (L. Saillant)

La rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ rad.s $^{-1}$, entraîne une légère déformation du globe terrestre. On le modélise par un fluide de masse volumique uniforme $\rho = 5,51 \cdot 10^3$ kg.m $^{-3}$ dont la surface se confond avec un ellipsoïde de révolution de demi grand axe a et de demi petit axe b correspondant au rayon équatorial et au rayon polaire. En coordonnées cylindriques d'axe confondu avec celui des pôles, la surface terrestre est définie par la relation

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

avec $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Le nombre sans dimension e se nomme excentricité de l'ellipsoïde. Pour $e \ll 1$, on admet que le champ de gravité à l'intérieur de l'astre s'écrit

$$\vec{g} = -\omega_1^2 r \vec{u}_r - \omega_2^2 z \vec{u}_z$$

avec

$$\omega_1^2 = \omega^2(1 - e^2/5) \quad \omega_2^2 = \omega^2(1 + 2e^2/5) \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho \quad .$$

1. Exprimer à une constante près le champ de pression dans la Terre.
2. On note P_0 la pression atmosphérique, presque uniforme à la surface de la Terre. Montrer que

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{\omega_2^2}$$

puis trouver l'expression de e en fonction de Ω , G et ρ .

3. On donne $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$. Calculer numériquement e et comparer à la valeur mesurée $e = 0,082$. Commenter.
4. On considère un point de latitude géocentrique λ situé à la distance r_0 du centre de la Terre, et coordonnées ($r = r_0 \cos \lambda$, $z = r_0 \sin \lambda$). Le champ de pesanteur en ce point définit la vertical locale et on appelle latitude géodésique l'angle θ que ce vecteur forme avec le plan équatorial. Montrer que

$$\tan \theta = \frac{\tan \lambda}{1 - e^2}$$

et calculer numériquement θ pour $\lambda = 45^\circ$.

5. Exprimer la différence entre le champ de pesanteur au pôle et le champ de pesanteur à l'équateur, en fonction de a , Ω , e , G et ρ . On donne $a = 6378 \text{ km}$. Calculer numériquement cette différence et la comparer à la valeur mesurée de $0,052 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

37. Gaz quantique confiné (A. Schilz-Henninger)

On considère un ensemble de $N = 7 \cdot 10^3$ atomes de lithium 6 maintenus près de l'origine O des coordonnées par un piège optique (système utilisant des lasers) de sorte que chacun d'eux subit, lorsqu'il se trouve au point M , une force $\vec{F} = -k \vec{OM}$. On traite ce système comme un gaz à l'équilibre possédant une pression locale $P(M)$ et une densité particulaire locale $n(M)$. L'influence de la pesanteur est négligée.

1. On suppose le gaz parfait et isotherme à la température T . Déterminer $n(M)$ et la taille typique λ de la région occupée par le gaz. Analyser l'influence de la température.
2. À très basse température, le comportement est en réalité celui d'un gaz quantique de fermions présentant une équation d'état de la forme

$$P = \gamma n^{5/3} \quad \text{où } \gamma \text{ est une constante}$$

Déterminer à nouveau $n(M)$ et la taille R de la région occupée par le gaz.

3. Sachant qu'il s'agit d'un comportement quantique, proposer une expression de γ faisant intervenir m et une constante universelle. Comparer λ et R pour $T = 100 \text{ nK}$.
4. On considère maintenant des situations où elles peuvent interagir les unes avec les autres, ce qui n'était pas le cas dans les questions précédentes. L'effet de cette interaction mutuelle peut être modulée par l'action d'un champ magnétique B ; il existe un champ critique B_c tel que :

- pour $B > B_c$, le système se comporte comme un gaz sans interaction ;
- pour $B < B_c$, toutes les particules interagissent mutuellement et le comportement est qualifiée « d'unitaire ».

L'expérience a été conduite avec des atomes de ${}^6\text{Li}$ et dans ce cas, $B_c = 8,32 \cdot 10^{-2} \text{ T}$. Un gaz quantique unitaire est caractérisé par un nombre sans dimension ξ appelé paramètre de Bertsch. Ses propriétés sont identiques à celle d'un gaz sans interaction, à ceci près qu'il convient de remplacer \hbar par $\sqrt{\xi} \hbar$ dans son équation d'état.

La figure (15) montre comment la densité du gaz se modifie en fonction de B . En analysant le comportement de R , déduire de ces résultats la valeur du paramètre ξ .

Données numériques : $m_{\text{Li}} = 1 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $k = 1 \cdot 10^{-18} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.
On donne $\int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/4$, $\int_0^1 u^2 (1 - u^2)^{3/2} du = \pi/32$.

38. Pincement d'une colonne de plasma (K. Sou)

On considère un jet de plasma formant une colonne cylindrique d'axe (O, \vec{u}_z) et de rayon a . Le plasma est considéré comme un gaz conducteur non visqueux, neutre en tout point. On repère les points de l'espace par des coordonnées cylindriques de même axe que ce cylindre. La colonne est parcourue par un courant d'intensité I réparti en une densité volumique de la forme $\vec{j} = j(r) \vec{u}_z$. Elle est plongée dans le vide de sorte que la pression est nulle à sa surface. Dans de telles conditions, un gaz ordinaire serait « aspiré » par le vide environnant et la colonne détruite. Sous l'effet des forces magnétiques qu'il crée lui-même, le jet de plasma peut au contraire se maintenir à condition que l'intensité qui le traverse soit suffisante.

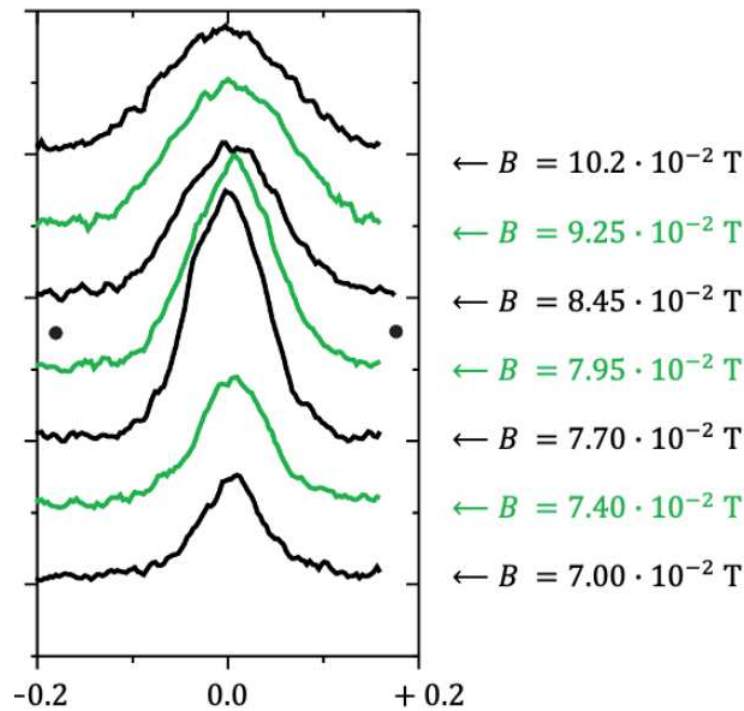


FIGURE 15 – Profils de densité dans un nuage d’atomes de lithium fermioniques pour diverses valeurs du champ magnétique, d’après Bourdel et al, Phys. Rev. Lett. 93, 050401 (2004).

1. On suppose pour l’instant que les courants sont uniformément répartis sur la section de la colonne. Déterminer le champ magnétique \vec{B} dans le plasma.
2. En régime permanent, la résultante des forces s’exerçant sur chaque élément infinitésimal de plasma est nulle. En déduire le champ de pression dans le plasma en fonction de I , μ_0 , r et a .
3. Soit p_m la valeur moyenne de la pression, calculée sur une section de la colonne. Vérifier que

$$p_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$$

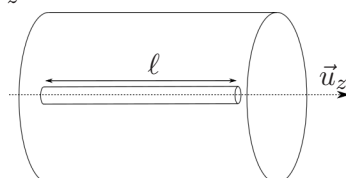
4. On envisage un plasma chaud ($T = 10^8$ K) comportant 10^{15} particules par centimètre cube. On l’assimile à un gaz parfait de pression p_m . Pour $a = 1$ cm, calculer numériquement la valeur de I assurant le confinement du jet.
5. Dans cette question, on ne suppose plus que le courant est uniformément réparti sur la section de la colonne, j et B étant alors des fonctions inconnues de r . Démontrer que la relation liant I à p_m reste cependant valable. Il sera commode d’utiliser une intégration par parties.

39. Dégonflement d’un ballon de baudruche (X-EPSCI) (A. Tchiouti)

Un ballon de baudruche a été gonflé et forme une sphère de rayon R limitée par une membrane d’épaisseur e . Elle est percée de N trous de rayon $a \ll e \ll R$. Étudier le dégonflement du ballon.

40. Tige tirée dans un tuyau (Mines-Ponts) (M. Viard)

On considère un tuyau infini de rayon R de rempli d’huile de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ . On y introduit une tige de masse m , de rayon a et de longueur $\ell \gg R$ disposée sur l’axe de révolution (O, \vec{u}_z) du tuyau. La tige se déplace selon \vec{u}_z avec une vitesse U constante.



1. Dans la région qui entoure la tige, on suppose que la vitesse du fluide est de la forme $\vec{v}(M,t) = v(M) \vec{u}_z$. Montrer qu'en coordonnées cylindriques, elle ne dépend que de r et la déterminer. On néglige l'effet de la pesanteur et on ne considère aucun gradient de pression.
2. Déterminer la force exercée par l'huile sur la tige, en négligeant les forces s'exerçant sur ses deux extrémités.
3. La tige étant initialement immobile, on exerce sur elle une force $\vec{F} = F \vec{u}_z$ qui la met lentement en mouvement. Déterminer l'évolution de sa vitesse U au cours du temps.

41. Plongeon d'une balle (L. Wysocinski)

Une balle de rayon $a = 2,5 \text{ cm}$ et de densité $\delta = 0,5$ plonge verticalement dans l'eau avec une vitesse $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$. Elle s'y enfonce, puis remonte vers la surface avant d'en émerger. En supposant le coefficient de traînée constant égal à 0,47, trouver jusqu'à quelle profondeur h elle descend sous la surface horizontale du liquide.

42. Propulsion d'un véhicule miniature (A. Aïd Kaddi)

La véhicule réduit de la figure (16) pèse 2 kg. Initialement immobile, il est poussé par un jet de diamètre 1 cm dans lequel l'eau présente une vitesse de 75 m.s^{-1} . Déterminer sa vitesse lorsqu'il aura parcouru un mètre. On négligera les frottements de l'air, la résistance au roulement et les pertes visqueuses dans le liquide.

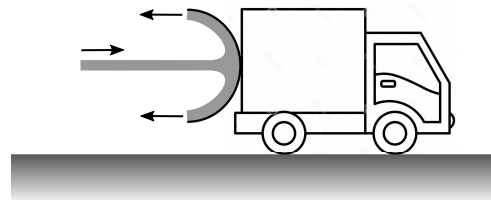
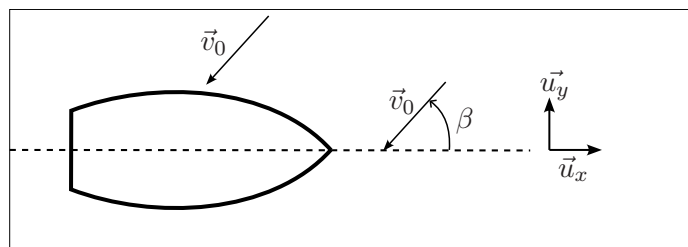


FIGURE 16

43. Propulsion d'un voilier (L. Beuf, L. Barotte)

Sous l'effet du vent, un voilier se déplace à vitesse constante à la surface de la mer. Grâce au plan anti-dérive immergé (plus couramment appelé « dérive »), il avance dans la direction \vec{u}_x orientée de la poupe vers la proue. Dans le référentiel terrestre, sa vitesse est notée \vec{v}_B et celle du vent \vec{v}_0 ; cette dernière est orientée dans une direction définie par l'angle β .



1. Exprimer la vitesse \vec{v}_1 du vent dans le référentiel du bateau. Donner sa norme et l'angle $\alpha = (\vec{u}_x, -\vec{v}_1)$ qui repère sa direction par rapport (comme β repère la direction de \vec{v}_0).
2. Calculer numériquement $|\vec{v}_1|$ et α pour $\beta = 60^\circ$, $v_B = 5 \text{ m.s}^{-1}$ et $v_0 = 15 \text{ m.s}^{-1}$.
3. Dans la suite, on s'intéresse à l'écoulement de l'air autour de la voile et aux efforts associés. Pourquoi est-il pertinent et commode de raisonner dans le référentiel lié au bateau ?

La voile est fixée sur le mât vertical et sur la bôme horizontale qui définissent un triangle d'aire Σ . On lui associe les vecteurs unitaires \vec{u}_b (parallèle à la bôme) et \vec{u}'_b (perpendiculaire à \vec{u}_b) et son orientation par rapport au vent relatif est définie par l'angle $\varphi = (\vec{u}_b, -\vec{v}_1)$, avec $\varphi \in [0, \alpha]$ (figure 17). Recevant le vent relatif, la voile s'incurve légèrement (ce détail n'est pas représenté) et dévie le flux d'air inclus dans le tube de courant délimité par Σ . La vitesse relative de l'air passe ainsi de \vec{v}_1 à \vec{v}_2 . On suppose que $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = V$ et que le flux dévié forme avec Σ le même angle φ que le flux incident. On note ρ la masse volumique de l'air. Dans la suite, et contrairement à ce qui se passait dans la question 2, V est fixée.

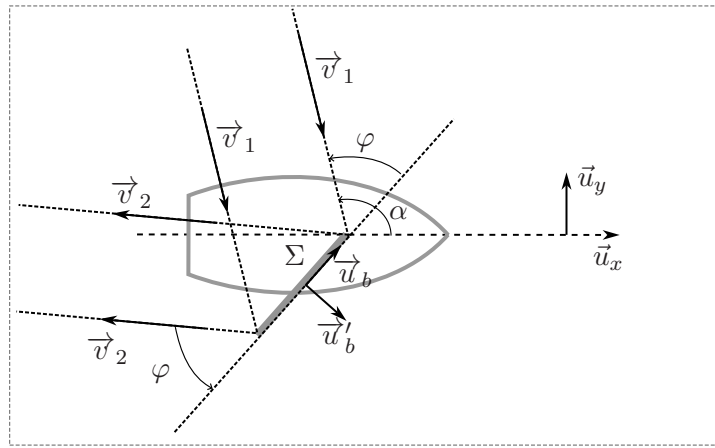


FIGURE 17 – Écoulement d'air autour d'un voilier

4. Quel est le débit massique de l'air rencontrant Σ ?
5. Exprimer dans la base (\vec{u}_b, \vec{u}'_b) la somme \vec{F} des forces exercées par l'air sur la voile.
6. Soit $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x$. Montrer que

$$F_x = 2\rho S \Sigma v^2 G(\alpha, \varphi) \quad \text{avec} \quad G(\alpha, \varphi) = \sin^2 \varphi \sin(\alpha - \varphi) \quad .$$

7. On note

$$\varphi_0(\alpha) = \frac{\alpha + \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{3}\right)}{2}$$

l'unique valeur de φ dans $]0, \alpha[$ telle que

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi}(\alpha, \varphi) = 0 \quad .$$

En utilisant un ordinateur, représenter les variations de G avec φ pour $\alpha = 90^\circ$ et commenter la situation d'un point de vue pratique.

8. Pour $\alpha = 90^\circ$, calculer numériquement la force maximale que l'on peut obtenir avec $\Sigma = 30 \text{ m}^2$ et $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
9. Représenter les variations de φ_0 et celles de $G(\varphi_0, \alpha)$ avec α pour $\alpha \in [0, 180^\circ]$. Commenter.
10. Le vent exerce sur la coque des efforts qui empêchent le bateau de remonter au vent (c'est à dire de naviguer avec α proche de 0). Quand $\alpha \in [0, \pi/2]$, la projection de ces efforts sur \vec{u}_x est donnée par

$$F_{cx} = -\rho S_c V^2 \cos^2 \alpha$$

avec $S_c = 3 \text{ m}^2$. Déterminer l'angle au vent minimal α_c sous lequel le bateau peut avancer.

Ondes

44. Vibration d'une chaîne de charges électriques (A. Badre)

Des charges électriques ponctuelles de masse m , de même valeur absolue Q , alternativement positives et négatives, sont placées à égale distance a les unes des autres le long de la droite (O, \vec{u}_x) . Chacune peut se déplacer sans frottement parallèlement à \vec{u}_y , comme le feraient des perles guidées par des fils rectilignes. On note y_n le déplacement de la particule de rang n , avec $y_n \ll a$.

1. En ne considérant que les interactions entre plus proches voisins, écrire l'équation du mouvement d'une particule donnée.

2. Effectuer le passage à la limite continue et montrer que le déplacement des particules obéit à une équation d'onde. Donner l'expression de la célérité.

3. Reprendre les questions précédentes en considérant *toutes* les interactions. Quelle difficulté pose dans ce cas la passage à la limite continue? Pour exprimer la célérité, on utilisera la somme de la série harmonique alternée

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

4. Reprendre l'analyse dans le cas où les charges ponctuelles sont remplacées par des dipôles électriques de masse m portant alternativement des moments dipolaires $p\vec{u}_y$ et $-p\vec{u}_y$, libres de se translater parallèlement à \vec{u}_y .

5. Proposer une application numérique dans le cas de molécules polaires occupant les nœuds d'un réseau cristallin. Commenter.

45. Vibrations d'une chaîne suspendue (J. Bello)

Une fine chaînette de longueur L , de masse linéique μ , assimilable à une corde sans raideur, est suspendue à un vibreur par une extrémité et pend verticalement dans le vide. Le vibreur impose un mouvement sinusoïdal colinéaire à \vec{u}_y , d'amplitude y_0 et de pulsation ω (figure 18). L'axe des abscisses est orienté verticalement vers la haut, avec une origine au bas de la chaînette. On se place dans les hypothèses usuelles d'étude des cordes vibrantes.

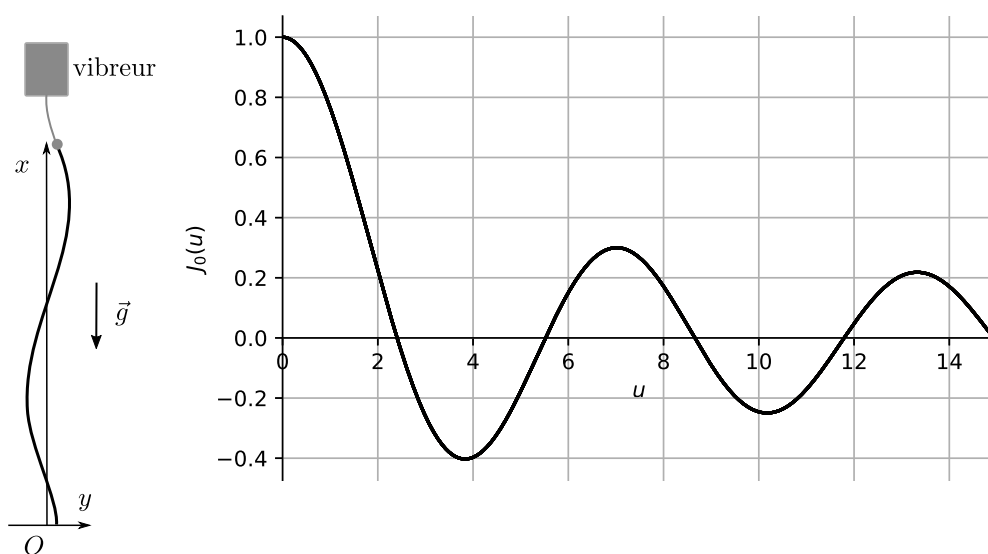


FIGURE 18 – À gauche : chaînette en vibration. À droite : graphe de la fonction de Bessel J_0 .

- On note $T(x)$ la tension de la chaînette à l'abscisse x . Établir son expression en fonction des paramètres de l'énoncé.
- Déterminer l'équation aux dérivées partielles dont le déplacement $y(x,t)$ des points de la chaînette est solution.

3. On cherche des solutions de la forme $y(x,t) = f(x) \cos \omega t$. À quelle équation différentielle f obéit-elle ?
4. Introduire une échelle de longueur a formée à partir des paramètres présents dans cette équation. On n'introduira aucun préfacteur sans dimension.
5. En éliminant la solution divergent en $x = 0$, on montre que la solution est de la forme

$$f(x) = AJ_0(2\sqrt{x/a})$$

où J_0 est une fonction de Bessel dont le graphe est représenté sur la figure. Achever la détermination de $y(x,t)$.

6. Donner l'expression des trois premières fréquences de résonance et les calculer numériquement pour $L = 50$ cm.

46. Célérité du son dans la mousse (S. Chafiai)

Une mousse est un milieu diphasique formé de liquide et de gaz. Le gaz se répartit dans un grand nombre de bulles parfois invisibles à l'œil nu et séparées les unes des autres par des frontières liquides. Citons en exemples la mousse à raser, la crème Chantilly ou encore celle que l'on peut former à la surface de l'eau dans une baignoire. Dans un modèle simple, la célérité c des ondes sonores dans une mousse est donnée par la loi de Wood :

$$c^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_l \phi (1 - \phi)} .$$

Dans cette expression

- P_0 désigne la pression ambiante,
 - ρ_l désigne la masse volumique du liquide,
 - γ est le rapport c_p/c_v du gaz,
 - ϕ est la fraction volumique du liquide dans la mousse.
1. Rappeler (ou retrouver) l'expression de la vitesse du son dans un fluide en rappelant les hypothèses et en définissant les grandeurs qui interviennent dans ce résultat classique.
 2. En analysant le cas particulier d'une mousse et en procédant à des hypothèses raisonnables, retrouver la loi de Wood.
 3. Cette loi ne s'applique qu'à fréquence assez basse, sans quoi le caractère hétérogène de la mousse, visible à petite échelle, se fait sentir. Préciser les conditions d'application de la loi de Wood en faisant intervenir le diamètre moyen des bulles.

47. Excitation d'un tuyau sonore par un piston vibrant (Mines-Ponts) (C. Cheval)

On considère un tuyau cylindrique de section S et de longueur L contenant de l'air de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 et de compressibilité isentropique χ_s . Son extrémité d'abscisse $x = L$ est fermée par une cloison rigide et l'autre, d'abscisse $x = 0$, est un piston vibrant dont la vitesse dépend du temps selon $U(t) = U_0 \cos \omega t$.

1. Exprimer la pression et la vitesse acoustique pour dans le tuyau.
2. L'extrémité d'abscisse L possède maintenant une impédance Z_1 . Comment trouver $p(x,t)$ et $v(x,t)$?
3. Le calcul explicite conduit à l'expression ci-dessous, qu'il est demandé de commenter :

$$v(x,t) = \frac{Z_a + Z_1}{2Z_a} \frac{U_0 e^{i\omega t}}{\cos kL + i \frac{Z_1}{Z_a} \sin kL} \left(e^{ik(L-x)} - \rho e^{-ik(L-x)} \right) \quad \text{avec} \quad Z_a = \rho_0 c \quad \text{et} \quad \rho = \frac{Z_1 - Z_a}{Z_1 + Z_a} .$$

48. Gravité et acoustique (T. Collin)

Dans la mise en équation usuelle des ondes acoustiques, on omet délibérément le champ de gravité. Montrer que sa prise en compte conduit à l'équation d'onde

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \vec{g} \cdot \vec{\nabla} p = 0 .$$

Par une analyse d'ordre de grandeur, discuter l'importance du terme gravitaire selon la longueur d'onde.

49. Trois polariseurs (d'après CCP) (M. Dal Corso)

On utilise dans une manipulation d'optique une source de lumière naturelle placée devant un collimateur de manière à produire une onde plane, ainsi que trois polariseurs P_1 , P_2 et P_3 que l'on peut disposer perpendiculairement au faisceau en les alignant les uns avec les autres. La lumière émergente est reçue sur un écran d'observation.

1. Pour l'instant on n'utilise que P_1 et P_2 . Comment faire pour que la lumière sur l'écran s'éteigne, sans éteindre la source bien entendu.
2. On introduit maintenant P_3 . Est-il possible de faire réapparaître la lumière sur l'écran? Si oui, où et comment le disposer pour maximiser l'éclairement. Si non, pourquoi?

50. Action d'une lame quart d'onde (M. Dartois-Izard)

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide et donc le champ électrique s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z \quad .$$

1. Quelle est sa polarisation dans chacun des quatre cas suivants : $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = \pi$, $\varphi = -\pi/2$? Qu'en est-il pour φ quelconque? On attend une réponse simple et sans calcul.
2. On introduit une lame quart d'onde dont l'axe rapide et l'axe lent sont orientés selon les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_ℓ , définissant respectivement la première et la seconde bissectrice des axes \vec{u}_y et \vec{u}_z . Exprimer le champ électrique dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\ell)$, avant sa rencontre avec la lame.
3. Décrire précisément l'état de polarisation de l'onde.
4. Exprimer le champ électrique après son passage au travers de la lame. Quel est son nouvel état de polarisation?

51. Biréfringence du scotch[®] (J. Demangel)

On considère ici un morceau de scotch[®] de d'épaisseur $e = 28,0 \mu\text{m}$ que la lumière traverse de part en part selon l'axe (Oz) perpendiculaire à ses faces. Ce matériau est biréfringent : une onde électromagnétique polarisée selon \vec{u}_x s'y propage avec l'indice n_0 alors qu'une onde polarisée sur \vec{u}_y s'y propage avec l'indice $n_e = n_0 + \Delta n$ avec $\Delta n > 0$.

1. Avez-vous déjà utilisé des dispositifs possédant des propriétés analogues? Dans quel contexte?
2. La face d'entrée du ruban adhésif se situe dans le plan d'équation $z = 0$. Une onde de la forme $\vec{E} = E_0 \frac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \exp(j(\omega t - kz))$ lui parvient. Exprimer le champ électrique dans la région $z \in [0, e]$ puis dans la région $z \geq e$.
3. Quel déphasage $\Delta\varphi$ les deux composantes du champ électrique présentent-elles l'une par rapport à l'autre? Quelle est en général la polarisation de l'onde transmise par le scotch[®]? À quelle condition obtient-on une polarisation rectiligne identique à l'onde incidence?
4. Pour mesurer Δn , on peut suivre le protocole suivant.
 - sur un ban optique, croiser un polariseur et un analyseur avec un éclairage en lumière blanche;
 - introduire le scotch[®] entre les deux et orienter ses lignes neutres à 45° des axes du polariseur et de l'analyseur;
 - observer le spectre de la lumière sortant de l'analyseur à l'aide d'un spectroscope et repérer les longueurs d'ondes éteintes.

Expliquer pourquoi certaines longueurs d'onde disparaissent dans le spectre et trouver une condition portant sur e , δn et λ sous laquelle cela se produit.

5. En utilisant une décuple épaisseur de scotch ($e' = 10e$), on a noté les longueurs d'onde éteintes ci-dessous. En déduire numériquement Δn .

λ (nm)	433,4	494,9	573,1	680,0
----------------	-------	-------	-------	-------

52. Ondes hertziennes dans l'eau de mer (A. Fabert)

On étudie la propagation d'ondes hertziennes dans de l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ (on remplace dans les équations de Maxwell ε_0 par $\varepsilon_r \varepsilon_0$) et sa conductivité $\sigma = 6,23 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ sont supposées réelles. On admettra que la loi d'Ohm locale peut s'appliquer dans un tel milieu.

1. Quelle est le domaine des fréquences des ondes hertziennes ? Donner les équations de Maxwell dans le milieu. Comment se situe la conductivité du cuivre comparée à celle de l'eau de mer ? Peut-on alors négliger les courants de déplacement ?
2. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.
3. Établir la relation de dispersion.
4. Déterminer la fréquence de coupure au-delà de laquelle il n'y a pas absorption. Quelle est la vitesse de phase dans ce cas ?
5. La fréquence d'une onde est $f = 100 \text{ MHz}$. Déterminer numériquement la pulsation spatiale k , puis la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

Mécanique quantique

53. Pression quantique dans un gaz de fermions (G. Fisch)

Les gaz de particules quantiques possèdent des propriétés très différentes des gaz ordinaires. On considère ici des particules indépendantes de masse m enfermées dans un boîte cubique de côté L , délimitée par des parois infranchissables. Elles y évoluent sans subir aucune interaction.

- On fait abstraction des directions définies par les vecteurs unitaires \vec{u}_y et \vec{u}_z et on envisage pour l'instant une situation unidimensionnelle, où la partie spatiale de la fonction d'onde ne dépend que de x . Déterminer les pulsations spatiales k_x possibles en introduisant un entier n_x .
- Dans le cas tridimensionnel, on admet que les deux autres composantes k_y et k_z du vecteur d'onde s'expriment de manière analogue, en lien avec deux entiers n_y et n_z . Représenter les états stationnaires permis dans l'espace des vecteurs d'ondes, c'est à dire l'espace portant k_x en abscisse, k_y en ordonnée et k_z dans la troisième direction. Quel volume $(\Delta k)^3$ peut-on attribuer à chaque état ? Quelle est son énergie ?
- On considère ici des fermions, c'est à dire des particules qui, comme les électrons, obéissent au principe d'exclusion de Pauli : deux particules seulement peuvent occuper un état donné. On se place à température nulle et dans ces conditions, les états se remplissent un par un à partir des énergies les plus basses. Soit $N \gg 1$ le nombre de particules et soit E_F (énergie de Fermi) l'énergie la plus haute parmi tous les états occupés. En s'aidant le dessin précédent, déterminer E_F en fonction de N et des paramètres du problème.
- On note E l'énergie totale du gaz. De quelle quantité dE augmente-t-elle lorsqu'on ajoute dN particules ? En déduire qu'elle s'exprime sous la forme

$$E = \beta \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{mL^2}$$

et donner l'expression de β .

- L'énergie E s'interprète comme l'énergie interne du gaz. En envisageant une dilatation infinitésimale du système, portant son volume de V à $V + dV$, en déduire l'expression de la pression sous la forme

$$P = qn^{5/3}$$

et fournir l'expression de q .

- On rappelle que les résultats précédents ont été établis à température nulle. Les commenter par comparaison au cas d'un gaz ordinaire.

54. Couleurs des cyanines et boîtes quantiques (E. Fontaine)

Les cyanines sont des cations possédant une succession liaisons conjuguées dans une chaîne d'atomes de carbones (figure 19). Chacun de ces atomes possède un électron π qui est délocalisé sur l'ensemble de la chaîne et bloqué à ses deux extrémités par l'atome d'azote. On se limite ici aux molécules pour lesquelles le nombre p d'atome C est impair et on note $p = 2q + 1$. La longueur de la chaîne vaut $(p + 1)l$ où $l = 0,14\text{nm}$ représente la distance interatomique. Ces molécules présentent une raie d'absorption dans la partie visible du spectre, ce qui leur confère des couleurs caractéristiques et expliquer qu'on les utilise fréquemment comme colorants. Pour p variant de 5 à 11, on a relevé la longueur d'onde λ correspondante et dressé le tableau (??).

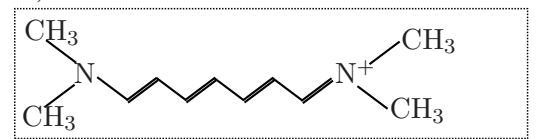


FIGURE 19 – Formule semi-développée d'une cyanine. Conformément à l'usage de la chimie organique, les atomes de carbones ne sont pas représentés mais on a indiqué les liaisons entre eux.

p	5	7	9	11
q	2	3	4	5
λ (nm)	416	519	625	735

TABLE 2 – Longueurs d'onde d'absorption des cyanines

On traite les électrons π comme des particules indépendantes évoluant dans un puits de potentiel à une dimension. Comme dans un atome, leur répartition est régie par les règles de Pauli et de Hund et se fait de

manière à minimiser l'énergie totale. L'absorption de lumière correspond au passage de l'électron de plus haute énergie vers l'orbitale vacante d'énergie immédiatement supérieure.

Interpréter l'évolution de λ avec p et estimer, d'un point de vue théorique, les longueurs d'onde d'absorption. Commenter l'accord ou l'écart aux résultats expérimentaux.

55. Fusion thermonucléaire de protons (V. Foucaut)

On étudie le processus par lequel deux protons de masse m_p et de charge e , initialement très éloignés et se dirigeant l'un vers l'autre, peuvent fusionner pour donner un noyau de deutérium. Bien que ce phénomène se déroule dans l'espace, on simplifie le problème en le supposant unidimensionnel. On admet que le mouvement relatif des deux particules est équivalent à celui d'une particule unique de masse $m = m_p/2$, se déplaçant le long de la droite (O, \vec{u}_x) , l'abscisse x correspondant à la distance entre les deux protons.

1. On constate que les protons peuvent fusionner alors que leur répulsion électrostatique interdit en principe leur rapprochement en deçà d'une certaine distance limite. Quelle phénomène quantique explique ce comportement ?

2. En préliminaire, on considère une particule de masse m qui rencontre une marche de potentiel : l'énergie potentielle est nulle pour $x < 0$ et vaut U_0 pour $x > 0$. On recherche un état stationnaire d'énergie $E < U_0$ et on note $\Phi(x)$ la partie spatiale de sa fonction d'onde. Déterminer le coefficient $t(x) = \Phi(x)/\Phi(0)$ (pour $x \geq 0$).

3. Dans cette question, l'énergie potentielle est nulle pour $x < 0$ et $x > L$, et vaut $U_0 > E$ pour $x \in]0, L[$. Si $t(L)$ est « assez faible », on admet que le coefficient de transmission de la particule au travers de cette « barrière » est $\Theta(E) = t(L)^2$. Quelle est la définition de $\Theta(E)$? À quelle condition $t(L)$ est-il faible ?

4. Revenons au problème des deux protons en interaction séparés par la distance x . Donner l'expression de leur énergie d'interaction $U(x)$ et représenter son graphe pour $x > 0$.

5. La particule équivalente de masse m est soumise à $U(x)$ et possède une énergie E . Délimiter sur le graphique précédent l'intervalle $[0, L]$ qui lui est classiquement interdit et donner l'expression de L .

6. La fusion des deux protons est réalisée lorsque la particule atteint la position $x = 0$. On admet que le coefficient de transmission $\Theta(E)$ de ce processus se déduit de celui de la question 5 par la substitution suivante :

$$\sqrt{U_0 - E} L \longrightarrow \int_0^L \sqrt{U(x) - E} dx \quad .$$

Exprimer $\Theta(E)$, alors appelé « facteur de Gamov », sous la forme $\Theta(E) = \exp(-\sqrt{E_G/E})$. Donner l'expression et la valeur numérique de E_G (en joules puis en eV). On donne $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{u} - 1} du = \frac{\pi}{2}$, $m = 8,35 \cdot 10^{-28}$ kg, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

7. Dans le contexte de la fusion thermonucléaire, l'énergie E des particules est liée à leur agitation thermique. Quelle est la valeur de Θ dans le noyau du Soleil où la température est de 15 millions de kelvins ? On tiendra compte du fait que le mouvement relatif des protons est unidimensionnel et que, par conséquent, seulement 1/3 de leur énergie cinétique intervient dans E .

En réalité, l'agitation thermique est associée à une distribution statistique des énergies des protons dont il faudrait tenir compte pour déterminer le taux de fusion.

56. Neutrons dans le champ de pesanteur (M. Gelinotte-Zinsius)

On étudie le comportement de neutrons de masse $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ ($g = -9,81$ m.s⁻²). Ils peuvent accéder à tout le demi-espace défini par ($z > 0$) et au contraire, la région ($z < 0$) leur est interdite.

1. Construire à partir de m , g et de la constante de Planck réduite \hbar une quantité ℓ_g homogène à une longueur et une quantité E_g homogène à une énergie. Afin d'assurer la compatibilité avec la suite des questions, on placera le facteur sans dimension $2^{1/3}$ dans le dénominateur de ces expressions. Les calculer numériquement et leur attribuer une signification qualitative.

2. On étudie des états dans lesquels la seule variable d'espace pertinente est la cote z et on s'intéresse à des états stationnaires associés à l'énergie E . Rappeler la forme de la fonction d'onde $\Psi(z, t)$ pour ces états et écrire l'équation de Schrödinger aux états stationnaires.

3. Réécrire cette équation en utilisant les variables adimensionnées $\zeta = z/\ell_g$ et $e = E/E_g$. Préciser les conditions aux limites satisfaites par la partie spatiale de la fonction d'onde $\Phi(\zeta)$.

4. Les solutions acceptables de l'équation de la question précédente sont de la forme $\Phi(\zeta) = \mathcal{N}\text{Ai}(\zeta - e)$ où \mathcal{N} est un facteur de normalisation et Ai la fonction d'Airy représentée sur la figure (20). Ses trois premières racines sur \mathbb{R}^- sont $\zeta_1 = -2,34$, $\zeta_2 = -4,90$ et $\zeta_3 = -5,52$. Exprimer les niveaux d'énergie et calculer numériquement les trois plus bas.

5. Représenter et interpréter la densité de probabilité de présence pour ces trois états.

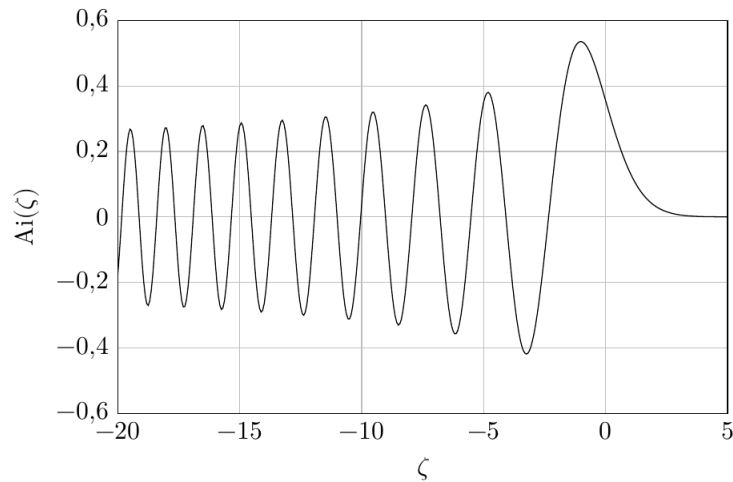


FIGURE 20 – Graphe de la fonction d'Airy

57. Interférences de molécules de phtalocyanines (H. Hamez-Lizzi)

En 2012, une équipe de chercheurs a publié un article exposant les résultats d'une manipulation produisant des interférences de molécules de phtalocyanine $\text{C}_{32}\text{H}_{18}\text{N}_8$ (masse $m = 8,5 \cdot 10^{-25}$ kg). Le dispositif (figure 21) est constitué d'un laser qui fait s'évaporer les molécules déposées sur la fenêtre d'entrée W_1 . Le faisceau ainsi produit est collimaté à l'aide d'une fente S , puis les molécules atteignent un réseau de fentes de pas $a = 100$ nm G . Au delà de ce réseau de diffraction, les molécules parviennent à un détecteur W_2 à la distance $L_2 = 564$ mm. La répartition spatiale des molécules sur l'écran fait apparaître trois franges bien visibles (image a). L'histogramme (c) donne le nombre total de particules détectées entre les deux lignes en pointillés pour chaque abscisse x exprimée en micromètres entre -60 et +60 environ.

À partir de leur point de départ de cote $y = 0$ et jusqu'à leur arrivée à l'écran situé à une distance $D = 96$ cm, les molécules sont soumises au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ et atteignent donc l'écran un peu plus bas, à des ordonnées $y_{\text{écran}}$ qui se répartissent entre -240 μm et 0 μm environ. Cela est lié à la dispersion de leurs vitesses initiales, de la forme $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ avec des valeurs de v_0 variant d'une molécule à une autre.

1. Relier v_0 à $y_{\text{écran}}$ en faisant intervenir d'autres grandeurs pertinentes.
2. Expliquer pourquoi on observe des franges sur l'écran.
3. Les distances mises en jeu permettent de considérer que l'écran est à l'infini par rapport au réseau G . Exprimer l'abscisse x_p des franges brillantes en fonction d'un entier p , de v_0 et d'autres paramètres du problème.
4. Interpréter les résultats expérimentaux.

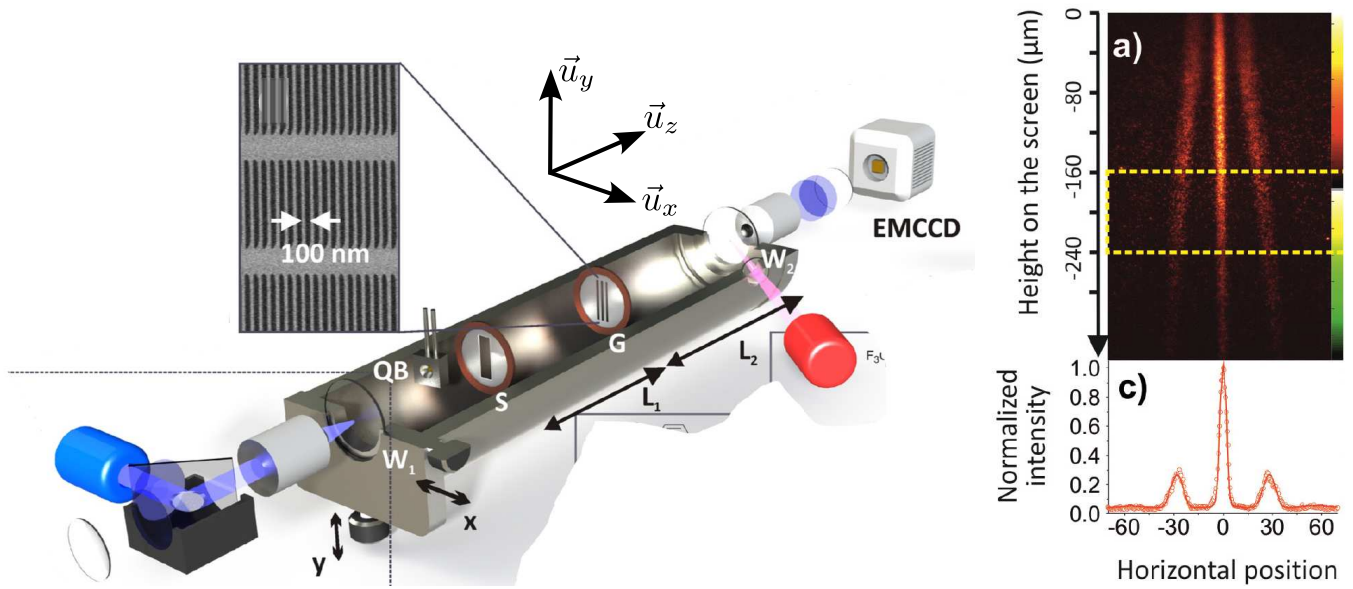


FIGURE 21 – À gauche : dispositif expérimental pour l'expérience d'interférences de molécules de phtalocyanine. À droite : résultats obtenus. Les abscisses et les ordonnées sont exprimées en micromètres.

Électricité

58. Caractérisation d'une bobine (A. Haumonté)

On considère une bobine d'auto-induction formée de $N = 1000$ spires jointives enroulées sur un cylindre. On souhaite par quelques mesures caractériser son comportement électrocinétique, notamment déterminer son auto-inductance L . Pour cela, on la connecte à une résistance et à un GBF fournissant une tension sinusoïdale de fréquence f pour former le montage de la figure 22. Un oscilloscope permet d'observer les tensions $V_1(t)$ et $V_2(t)$.

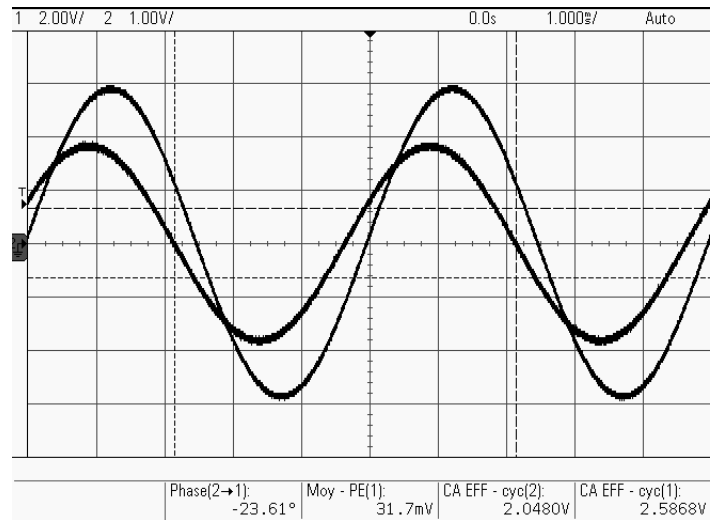
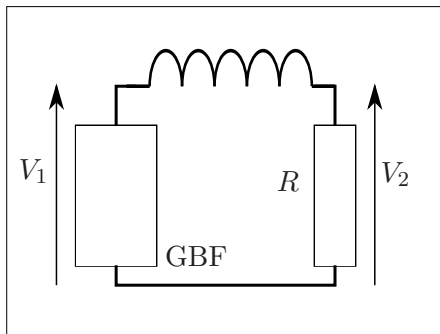


FIGURE 22 – Montage d'étude d'une bobine et exemple de signaux observés

1. Pour l'instant, on modélise la bobine par une inductance pure L . Avec $R = 100\ \Omega$, on observe les signaux visibles sur la partie droite de la figure (22). Par une analyse de déphasage, déterminer la valeur de L . Le rapport d'amplitude observé est-il en accord avec le résultat obtenu ?
2. En réalité, la bobine ne se comporte pas comme un inductance pure. Le fil de cuivre qui la constitue présente une certaine résistivité et la bobine est donc modélisée par l'association en série d'une inductance L et d'une résistance r . Exploiter à nouveau les résultats expérimentaux pour trouver r et améliorer la précision sur L .
3. À partir de fréquences de l'ordre de $10\ \text{kHz}$, la bobine présente un surprenant caractère *capacitif* dont le modèle précédent ne rend pas compte. En effet, les spires de cuivre dont elle est formée sont recouvertes d'une couche isolante et, placées côte à côte les unes des autres, elles se comportent comme de minuscules condensateurs, avec accumulation de charges sur les faces du métal au contact de l'isolant (figure 23). On note C_i la capacité du condensateur formé par deux spires adjacentes. Quelle est la capacité C de la bobine dans son ensemble ?

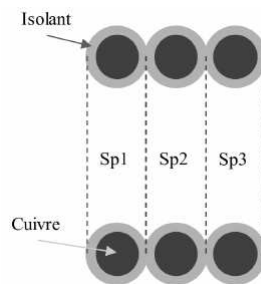


FIGURE 23 – spires successives d'une bobine

4. Le modèle amélioré de la bobine tient compte de cette capacité C . Convient-il de la placer en série ou en parallèle de la branche (L, r) déjà décrite ?
5. En augmentant la fréquence, on constate V_1 et V_2 sont phase pour $f = 18,46\ \text{kHz}$. En déduire la valeur de C .

6. Pour certaines applications, on modélise de manière approximative la bobine par l'association *en parallèle* d'une résistance r' , d'une inductance L' et d'une capacité C' . Montrer que cela est loisible si $2\pi Lf \gg r$ et donner les expressions de L' , C' et r' en fonction de L , C , r et f .

59. Caténaire d'alimentation ferroviaire (L. Hayouni)

Une motrice de TGV est alimentée en haute tension alternative, de fréquence 50 Hz, selon le schéma de la figure 24. À intervalles réguliers, des sous-stations d'alimentation distantes de $l = 50$ km, assimilées à des générateurs idéaux de fem efficace $U_e = 25$ kV, alimentent la caténaire formée d'un câble de cuivre de conductivité $\gamma = 6,0 \cdot 10^7$ S.m $^{-1}$ et de section s . La locomotive consomme un courant d'intensité efficace $I_e = 0,35$ kA quelle que soit sa position x sur la ligne. Le retour du courant vers les sous-stations s'effectue par les rails et le sol dont on néglige la résistance électrique. On note $P_0 = U_e I_e$ la puissance moyenne qui serait consommée par la locomotive si elle était directement branchée sur une sous-station d'alimentation.

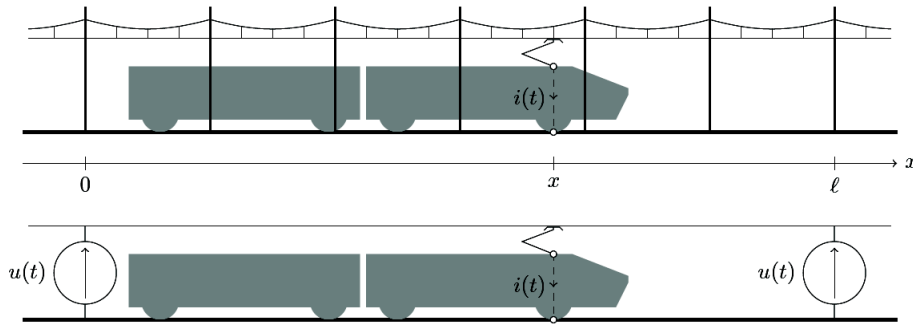
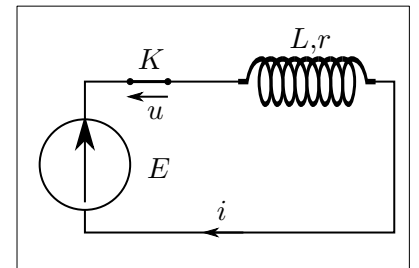


FIGURE 24 – Alimentation d'un TGV

1. Exprimer la puissance moyenne $P(x)$ consommée par la rame lorsque la locomotive se trouve à l'abscisse x .
2. Pour un bon fonctionnement et limiter l'échauffement de la caténaire on impose $P > 0,98 P_0$ quelle que soit la position du train. En déduire la valeur minimale s_{min} de la section du câble de cuivre.

60. Arc électrique de rupture (D. Hoffmann)

Les machines électriques utilisées en milieu industriel comportent fréquemment des bobinages et présentent, pour cette raison, un comportement inductif. La coupure brutale du courant dans de tels système pose quelques difficultés puisqu'il faut dissiper en très peu de temps l'énergie magnétique emmagasinée. À haute intensité, des étincelles et des arcs électriques peuvent apparaître et endommager les interrupteurs. Pour modéliser cette situation, considérons un circuit électrique formé d'une bobine d'inductance $L = 2$ H et de résistance $r = 100 \Omega$ placée en série avec une source de tension de fem E et un interrupteur K .



1. Le circuit étant depuis longtemps en fonctionnement, quelle est l'expression de l'intensité i_0 qui circule dans le circuit ? En introduisant une constante de temps τ , préciser ce que signifie l'expression « depuis longtemps ».
2. Savez-vous ce que l'on appelle « étincelle de rupture » dans un circuit inductif et connaissez-vous l'interprétation qualitative de ce phénomène ?
3. À $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Malheureusement, son comportement n'est pas celui qu'on attend car l'air entre les contacts s'ionise et devient conducteur. La caractéristique de l'interrupteur est définie par la relation

$$u = u_m + \frac{a}{b + i} \quad \text{avec} \quad u_m = 40 \text{ V}, \quad a = 40 \text{ V}\cdot\text{A} \quad b = 0,04 \text{ A} \quad .$$

Elle est représentée sur la figure 25.

Est-il possible que l'on obtienne, quelque temps après l'ouverture de l'interrupteur, un nouveau régime permanent dans lequel une intensité non nulle se maintient ? Discuter selon la valeur de E et déterminer une valeur critique E_c séparant deux types de comportement, l'un possédant un unique point de fonctionnement et l'autre en possédant deux.

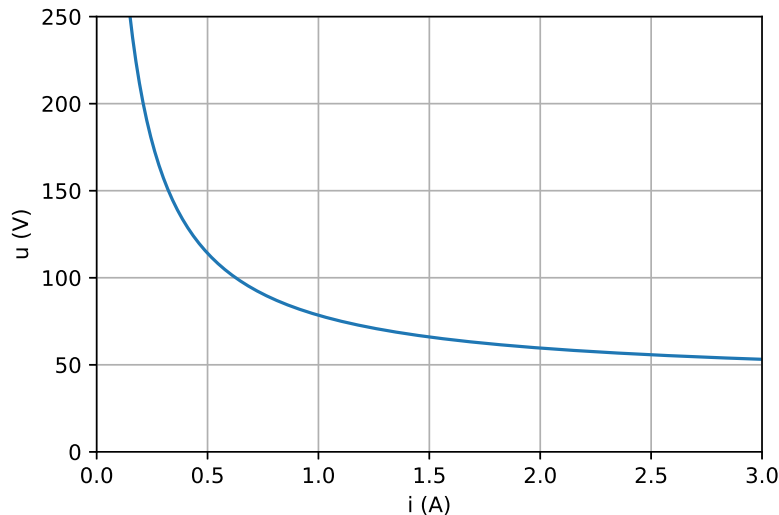


FIGURE 25 – Caractéristique d'un arc électrique

Pour répondre à cette question, on raisonne en cherchant le point de fonctionnement du système formé de l'arc d'une part et du générateur en série avec la bobine d'autre part. Au choix, une méthode graphique et une méthode calculatoire sont permises.

- On suppose dans cette question $E < E_c$ et on étudie le régime transitoire qui suit l'ouverture de l'interrupteur. Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ et montrer que l'intensité décroît jusqu'à s'annuler. Représenter le déplacement du point de fonctionnement dans le diagramme de la figure (25).
- Montrer que le temps d'extinction du courant est donné par

$$T = \tau \int_1^0 \frac{dx}{1 - x - \gamma - \frac{\alpha}{\beta+x}}$$

avec $\alpha = a/(ri_0^2)$, $\beta = b/i_0$, $\gamma = u_m/E$. Pour $E = 80 \text{ V}$, cette intégrale vaut 0,73. Calculer numériquement T .

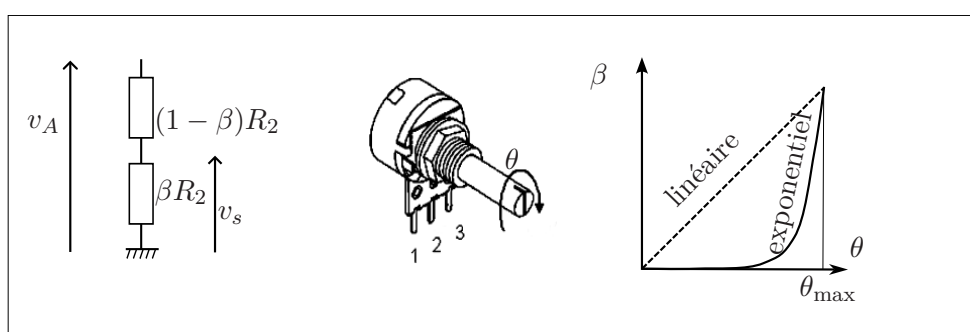
- On suppose maintenant $E > E_c$. En utilisant l'équation différentielle du circuit, discuter la stabilité des deux points de fonctionnement. Lequel observera-t-on expérimentalement ?

Remarque : on peut à nouveau exprimer sous forme intégrale le temps d'établissement du régime permanent. Il semble que l'intégrale soit divergente, ce qui n'est pas impossible puisque la fin est définie par l'annulation du dénominateur ...

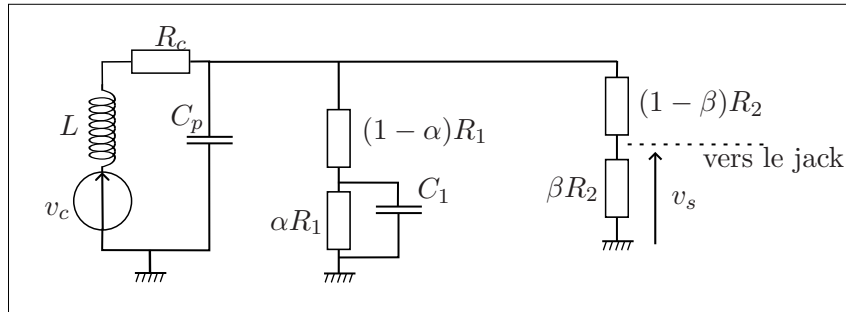
61. Filtre pour guitare électrique (A. Jenn)

Sur une guitare électrique, un « micro » produit un signal électrique reflétant le mouvement des cordes près desquelles il est placé. Avant d'être envoyé à un haut-parleur pour produire un son, ce signal subit divers traitements électroniques dont cet énoncé donne un aperçu *extrêmement simplifié*.

- Le circuit électronique comporte plusieurs étages dont l'un est représenté ci-dessous, avec une tension d'entrée v_A et une tension de sortie v_s . Les résistances βR_2 et $(1 - \beta)R_2$ sont réalisées ensemble à partir d'un potentiomètre, composant à trois bornes muni d'un bouton rotatif qui permet à l'utilisateur de modifier la valeur de α en faisant tourner un bouton rotatif. Quel est le rôle de cet étage ?



2. Sur certains potentiomètres, β varie linéairement avec l'angle de rotation θ du bouton ($\alpha = \theta/\theta_{\max}$). Sur d'autres, il varie de manière exponentielle, sous la forme approximative $\alpha = e^{q(\theta-\theta_{\max})}$ avec $q \in \mathbb{R}^+$. Lequel des deux types est préférable si on souhaite contrôler confortablement le niveau sonore émis par l'instrument ?
3. Le montage complet est représenté ci-dessous. L'inductance L , la capacité C_p et la résistance R_c représentent le micro placé sous la corde et v_c la fem produite par son mouvement. Les résistances αR_1 et $(1-\alpha)R_1$ sont à nouveau réglables au moyen d'un potentiomètre. Selon vous, quel est le rôle (l'intérêt musical) de la partie du montage comportant ces résistances et le condensateur de capacité C_1 ?



4. Plutôt que de chercher la forme explicite de la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v_s}/\underline{v_c}$ de ce montage, nous allons en calculer un tableau de valeurs grâce à un code Python, puis représenter graphiquement le gain. Pour cela, on introduit les valeurs numériques de tous les composants, puis les fréquences et pulsations utiles par les instructions `f = np.logspace(1, 5, 10000)` ; `omega = 2 * np.pi * f`. Puis on procède étape par étape aux calculs pertinents jusqu'à obtenir les valeurs de \underline{H} . Par exemple, l'impédance du condensateur est donnée par la ligne `Z_C1 = 1 / (1J * C1 * omega)`. En suivant cette méthode, compléter le code `trace_bode_guitare_elec_eleve.py` puis tracer le diagramme de Bode.
5. Utiliser ce code pour commenter les influences de α , β , et $R_1 = R_2$ (les deux potentiomètres sont supposés identiques)
6. La sortie de ce montage est envoyée sur un jack d'impédance d'entrée égale à 1 mégohm. Que cela vous inspire-t-il ?

62. Une technique de mesure de déphasage (F. Junot-Robin)

Le montage représenté sur la figure 26 fait intervenir des ALI supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire. Il met aussi en jeu des diodes dont la caractéristique est définie par l'équation $i = i_0 (\exp(v/v_0) - 1)$, les orientations de v et de i étant définies sur la figure. Toutes les résistances présentent la même valeur $R = 100 \text{ k}\Omega$.

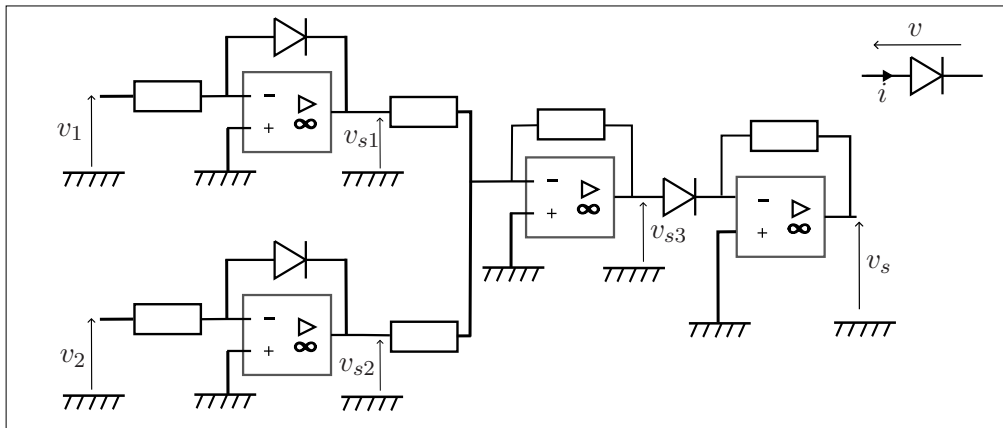


FIGURE 26 – Montage faisant intervenir des ALI et des diodes

1. Exprimer v_{s1} et v_{s2} en fonction de v_1 et v_2 respectivement.
2. Exprimer v_{s3} fonction de v_{s1} et v_{s2} .

3. Trouver enfin l'expression de v_s en fonction de v_1 et v_2 .
4. Commenter et analyser sommairement l'hypothèse selon laquelle les ALI fonctionnent en régime linéaire. Le montage dans son ensemble est-il linéaire ?
5. On prend $v_1 = A \cos \omega t$ et $v_2 = B \cos(\omega t + \varphi)$, A , B et ω étant supposés connus. Quel traitement faut-il appliquer à v_s pour en déduire φ ?

Optique

63. Étude d'une lunette astronomique (Centrale-Supélec) (N. Lakouanane)

Un observateur accommodant à l'infini observe des objets situés à l'infini à travers une lunette astronomique.

1. Décrire le montage d'une lunette astronomique composée de l'association de deux lentilles minces convergentes. La lentille constituant l'objectif a une focale f'_{obj} et celle constituant l'oculaire une focale f'_{oc} . Donner une expression du grossissement et du grandissement (on remarquera que le grandissement ne dépend pas de la position de l'objet). Quelle relation simple relie ces deux grandeurs ?

2. La lunette considérée ici est constituée par l'association d'une lentille convergente L_{obj} de focale $f'_{\text{obj}} = 9a$ et d'un oculaire. Cet oculaire est lui-même formé de deux lentilles minces convergentes de même distance $f'_1 = 3a$, éloignées l'une de l'autre d'une distance $2a$.

Pour cet oculaire, déterminer la position du foyer image F' et du foyer objet F en exprimant $\overline{O_2F'}$ et $\overline{O_1F}$. Déterminer également la position des points conjugués H et H' pour lesquels le grandissement transversal vaut

1. Enfin, calculer les distances focales définies par

$$f' = \overline{H'F'} \quad \text{et} \quad f = \overline{HF} \quad .$$

Après avoir effectué les calculs, vous pourrez utiliser le logiciel optgeo pour observer le cheminement des rayons dans cet oculaire et vérifier vos résultats. Le fichier à utiliser s'intitule `oculaire_Centrale.opt` et a été produit avec $a = 50$ mm.

3. Comment faut-il placer cet oculaire pour que l'ensemble de la lunette soit afocal et constitue donc une lunette astronomique ? Donner la distance séparant la lentille objectif de L_1 .

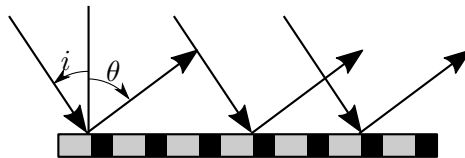
On utilisera le fichier de simulation `lunette_Centrale_avec_optgeo.opt` et ouvrir l'onglet des commentaires ($a = 40$ mm). En déplaçant ensemble les deux lentilles constituant l'oculaire, vérifier la position de L_1 .

4. Si l'objet à l'infini est vu à l'oeil nu sous un angle α , sous quel angle apparaît-il à travers l'appareil ?

5. Le rayon R de la monture de l'objectif de la lunette complète est $R = 2,5$ cm. On suppose que le faisceau qui atteint le système est parallèle et de rayon supérieur à R . Quel est alors le rayon du faisceau sortant ? Dans l'hypothèse d'un faisceau incident divergent, où faut-il placer l'oeil pour observer avec un maximum d'intensité ?

64. Monochromateur à réseau (M. Léger)

1. Un réseau par réflexion fonctionne de manière analogue à un réseau par transmission, si ce n'est qu'on y exploite la lumière réfléchi au lieu de la lumière transmise. En adaptant le raisonnement vu pour les réseaux par transmission, démontrer la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle d'émergence θ pour l'ordre p . On notera n la linéature et on prendra garde à l'orientation des angles, positifs dans le sens trigonométriques.



On considère dans la suite un réseau plan utilisé en réflexion, comportant n traits par unité de longueur, parallèles à l'axe z (figure 27). L'angle entre la normale au réseau et l'axe x est réglable et noté α . Le faisceau incident et la lumière diffractée sont caractérisés par les angles β et β' .

2. On impose que dans l'ordre 2, la raie $\lambda_0 = 600$ nm soit diffractée dans la direction $\beta' = 0$ lorsque $\alpha = 0$. Quelle valeur faut-il donner à β ? Cette valeur reste fixée dans la suite.

3. Dans cette question, on maintient $\alpha = 0$. La lumière diffractée par le réseau émerge de l'appareil par une fente de largeur $2b$ placée dans le plan focal d'une lentille d'axe Ox . Montrer qu'on sélectionne ainsi une fine bande spectrale centrée sur λ_0 , dont on calculera la largeur $\delta\lambda$.

4. Entre quelles valeurs limites faut-il faire varier α pour sélectionner, dans la direction $\beta' = 0$, tout le spectre visible $\lambda \in [400 \text{ nm}, 800 \text{ nm}]$.

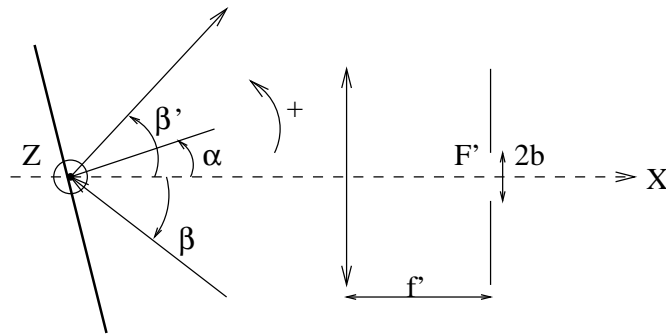


FIGURE 27 – Monochromateur à réseau

Valeurs numériques : $n = 500 \text{ mm}^{-1}$, $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, $f' = 10 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ mm}$.

65. Modes d'une fibre optique à saut d'indice (A. Loisy)

Une fibre optique à saut d'indice est un cylindre transparent formé de deux régions coaxiales : d'une part le cœur de diamètre d et d'indice n_1 et d'autre part la gaine d'indice n_2 . Elle est destinée à guider une onde lumineuse en minimisant la déperdition de signal.

1. L'étude menée ici utilise le concept de rayon lumineux. À quelle condition faisant intervenir la longueur d'onde cette approche est-elle légitime ?

2. Un rayon lumineux pénètre dans la fibre dans un plan diamétral avec un angle d'incidence θ_0 (figure 28). Pour qu'il soit guidé sans perte sur une longue distance, il est nécessaire qu'il se réfléchisse sur l'interface entre le cœur et la gaine sans jamais la traverser. Montrer que c'est le cas si

$$\sin \theta_0 \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad .$$

Calculer cette valeur limite, appelée ouverture numérique, pour $n_1 = 1,46$ et $n_2 = 1,455$.

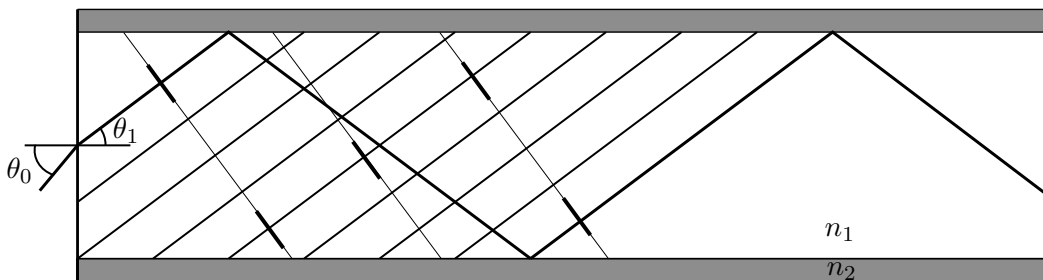


FIGURE 28 – Propagation dans une fibre optique. On a tracé un rayon lumineux particulier en gras et d'autres formant avec lui une onde plane. Quelques portions de plan d'onde sont aussi représentées.

3. L'approche précédente néglige les propriétés ondulatoires de la lumière. Lorsqu'on en tient compte, il apparaît que seuls certains des angles θ_0 satisfaisant la condition précédente fonctionnent, et ce pour la raison suivante. Après deux réflexions à l'interface, l'onde lumineuse plane se propageant dans la direction définie par l'angle θ_1 doit être en phase avec celle de même direction qui n'a pas été réfléchi. Montrer que cette condition impose

$$n_1 \sin \theta_1 = \frac{\ell \lambda}{2d} \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{N} \quad .$$

4. Chaque valeur de ℓ correspond à un mode de propagation dans la fibre, c'est à dire à une distribution particulière de l'onde lumineuse dans la fibre. Pour $\lambda = 633 \text{ nm}$ et $d = 6 \mu\text{m}$, combien de modes sont possibles ? Qu'en est-il avec $d = 3 \mu\text{m}$ et $\lambda = 1064 \text{ nm}$? Justifier l'expression de « fibre monomode ».

66. Localisation des franges du coin d'air (P. Mancini)

On considère un interféromètre de Michelson monté en coin d'air comme l'indique la figure 29, où sont représentés le miroir M_1 et le symétrique M'_2 de M_2 par rapport à la séparatrice.

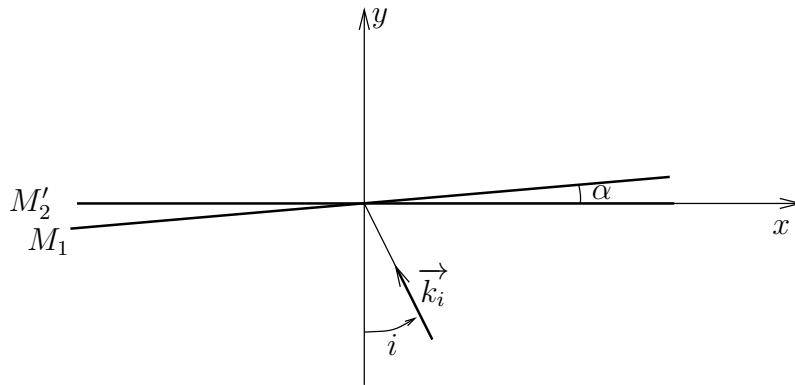


FIGURE 29

a) On éclaire les miroirs par une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}_i$ rencontrant M'_2 sous l'angle d'incidence i . Elle donne naissance, après réflexion sur M_1 et M'_2 , à deux nouvelles ondes planes de vecteurs \vec{k}_1 et \vec{k}_2 . Exprimer \vec{k}_1 et \vec{k}_2 sur la base (\vec{u}_x, \vec{u}_y) .

b) En un point $M(x, y)$, déterminer le déphasage entre ces deux ondes et montrer que l'ordre d'interférence s'écrit

$$p(M) = \frac{2 \sin \alpha}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{OM}$$

où $\vec{u} = \cos(\alpha - i) \vec{u}_x + \sin(\alpha - i) \vec{u}_y$.

c) On remarque que $\vec{u} \cdot \vec{OM}$ représente la valeur algébrique \overline{OH} , H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (O, \vec{u}) . En déduire que les lieux d'intensité lumineuse constante (les « franges ») sont des plans dont on précisera la position. Placer \vec{u} sur le schéma et dessiner la trace de quelques uns de ces plans.

d) Déterminer l'interfrange.

e) Le coin d'air est éclairé par une source étendue fournissant une superposition d'ondes planes incohérentes, l'angle i prenant toutes les valeurs entre $-i_0$ et i_0 . On suppose i_0 et α petit et on limite les calculs au premier ordre en $\alpha - i$.

En un point M donné, déterminer la variation maximale de l'ordre d'interférence associée à la variation de l'angle i .

f) Dans quelle région les franges gardent-elles un contraste acceptable? On fournira un encadrement de y .

g) Faire le lien avec la localisation des franges produites par l'interféromètre de Michelson monté en coin d'air.