Mathématiques avec Python — préparation à l'oral

Exercice 1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $u_0(a) = a$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(a) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{u_n(a)}{1+\sqrt{1+u_n(a)^2}}\right).$$

a. Écrire une fonction d'en-tête `suite(a, m)` et renvoie la liste $(u_0(a), \dots, u_m(a))$.
Tester cette fonction en affichant `suite(0, 20)` puis `suite(1, 20)` et `suite(2023, 20)`.

b. Tracer le graphe de la fonction $2^{10}u_{2^{10}}$ sur l'intervalle $[-30, 30]$ avec un pas de 0,01.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $\mathrm{A}_n : \theta \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\theta)}{k}$ sur $[-\pi, 3\pi]$.

Tracer le graphe de A_n pour tout n dans $[\![1, 10]\!]$ puis pour tout n dans $[\![100, 110]\!]$.

Exercice 3. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, dont on note les colonnes $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$.

Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $(\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4)$.

Exercice 4. Pour tout t dans $[0, +\infty[$, on considère la matrice $\mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que les valeurs propres de $\mathrm{M}(t)$ sont réelles. On les note $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ dans l'ordre croissant.

a. Écrire une fonction `spectre(t)` qui prend un flottant t en entrée et renvoie le triplet $[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]$.

b. Représenter graphiquement les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sur le segment $[-3, 3]$.

Exercice 5. a. Écrire une fonction `antisym(n)` qui renvoie une matrice antisymétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des coefficients choisis aléatoirement dans $[0, 1]$.

b. Engendrer plusieurs matrices de ce type pour $n = 10$ et faire afficher leurs valeurs propres. Que constate-t-on ?

c. On pose $\mathrm{M} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})$. Vérifier sur plusieurs simulations que M est une matrice orthogonale.

Exercice 6. Déterminer les points critiques de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Représenter graphiquement f et conjecturer la nature des points critiques. Prouver enfin les résultats conjecturés.

Exercice 7. Calculer des valeurs approchées de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$. Comparer.

Exercice 8. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \geqslant 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x}\,\sin(t))\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \leqslant 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x}\,\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

Représenter la fonction φ sur $[-3, 5]$ et sur $[-1000, 0]$.

Exercice 9. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes qui suivent la même loi. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des X_k. On définit

$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k.$$

Dans cette question, la loi des X_k est $\mathcal{B}(50, 1/50)$ et celle de N est $\mathcal{P}(1/12)$.

Écrire une fonction qui simule la variable aléatoire Y. Réaliser une série de 100000 expériences. Estimer la moyenne et l'écart-type de Y.

Exercice 10. Soient n et N deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On dispose de N urnes et de n boules. Chaque boule est déposée dans l'une des urnes, choisie équiprobablement parmi les N urnes disponibles. Les choix sont supposés indépendants.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre d'urnes vides à la fin du processus.

a. Écrire une fonction d'en-tête `remplir(n, N)` qui renvoie une liste de longueur N représentant le nombre de boules dans chacune des urnes à la fin du processus.

b. Écrire une fonction d'en-tête `nb_urnes_vides(n, N)` qui renvoie le nombre d'urnes vides à la fin du processus (c'est en somme une simulation de T_n).

c. Écrire une fonction d'en-tête `esp(n, N, taille)` qui effectue `taille` fois le processus et renvoie la moyenne de T_n sur ces expériences.

d. Prendre N égal à 10 et `taille` égal à 1000 et faire varier n de 1 à 100.
Représenter graphiquement les points $(n, \mathbb{E}(T_n))$.

Exercice 11. **a.** Écrire une fonction `legendre(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie en sortie le polynôme de Legendre de rang n, défini par

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}((X^2-1)^n)^{(n)}.$$

b. Écrire une deuxième fonction ayant le même objectif, cette fois en se basant sur la construction par récurrence

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} X P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}.$$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$f_n(P) = (X-2)(X-3)P' - nXP.$$

On admet que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et on note M_n sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. Écrire une fonction `M(n)` qui renvoie la matrice M_n.

b. Afficher les matrices M_4 et M_7 ainsi que leurs valeurs propres.

Exercice 13. On note α l'unique [1] l'équation $\text{sh}(x) = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^\alpha \text{sh}^n(t)\, dt.$$

a. Trouver une valeur approchée de α.

b. Écrire une fonction d'en-tête `suite(n)` qui renvoie une valeur approchée de $I_0, \dots, I_n$.

---

1. Il faut bien sûr savoir justifier précisément l'existence et l'unicité de cette solution.