

DEVOIR N° 0

Pour le mardi 1^{er} septembre 26

Voici une série d'exercices destinés à consolider les connaissances que vous avez acquises en PCSI et à préparer votre future année en PC*. La connaissance du cours constitue un prérequis fondamental et je vous recommande de le réviser en parallèle de la résolution des questions.

Il ne vous sera pas demandé de rendre ce que vous aurez produit pendant les mois de juillet et d'août, mais vous devrez composer, le jour de la rentrée, sur un devoir surveillé de deux heures portant sur des extraits de cet énoncé et qui pourra en outre comporter quelques questions de cours élémentaires. Il vous est donc vivement recommandé de mettre votre travail au propre après avoir résolu les exercices au brouillon : vous vous assurerez ainsi une très bonne note en septembre et démarrerez l'année en pleine confiance. Ce sera aussi l'occasion de vous entraîner à respecter quelques consignes de rédaction auxquelles vos professeurs vous ont sans doute déjà habitués mais que je me permets de rappeler.

- Respectez les alphabets latin et grec en formant correctement les lettres. Si vous n'avez pas acquis ces bases depuis l'école élémentaire, achetez un cahier d'apprentissage (comme ceux de la collection « graphillette »), entraînez-vous et faites des pages d'écriture.
- Appliquez les règles d'orthographe et de syntaxe de la langue française : vous vous adressez à une personne qui n'a pas à traduire un affreux sabir !
- Adoptez un style de rédaction *clair, concis et sans détour*. Votre professeur, comme les correcteurs qui traitent des centaines de copies lors des concours, sont agacés par les longs développements désordonnés et verbeux ; peut-être ne les lisent-ils même pas ! Ils attendent en général un argument ou quelques mots clés prouvant que vous avez bien compris. Ne les masquez derrière un verbiage inutile.
- Souvent, un bon schéma vaut mieux qu'un long discours !
- Une copie n'est pas un brouillon et mérite un support matériel digne. Utilisez du papier de bonne qualité et un stylo produisant un tracé net et bien contrasté. Les encres pâles et les stylos à bille médiocres donnant des traits irréguliers sont à proscrire.
- Arrangez-vous pour rendre des copies agréables à lire et mettez en évidence les résultats, par exemple par un encadrement.
- N'utilisez pas de correcteur blanc, n'écrivez pas entre les lignes ni dans les marges.
- Dispensez-vous de rédiger en détail les calculs élémentaires (dérivation, intégration, développement, etc). Effectuez-les au brouillon et ne reportez sur votre copie que les éléments essentiels.
- Ayez en permanence le souci de l'homogénéité des relations que vous écrivez. Un résultat non homogène est presque toujours sanctionné de la note zéro.
- Quand l'énoncé demande de prouver ou de justifier un résultat qu'il fournit, soyez particulièrement méticuleux et faites bien apparaître les étapes importantes du calcul ou du raisonnement. Dans ce cas en effet, le résultat par lui-même n'est pas noté puisque c'est l'énoncé qui le donne ; seule la *manière* de l'obtenir est récompensée.
- Soyez *honnêtes*, n'agacez pas le correcteur en trichant.
- Ne négligez pas les applications numériques et n'oubliez jamais les unités. N'hésitez pas à commenter les résultats et réagissez devant des valeurs aberrantes.
- Enfin, gardez toujours en tête la raison pour laquelle vous vous astreignez à tous ces efforts : ils vous permettront de mieux réussir les concours et d'accéder à l'école de vos rêves !

Ne cédez pas à la tentation d'oublier ces consignes aussitôt que vous les aurez lues, sans quoi vous vous exposez à la décision du correcteur de ne pas lire votre travail.

Exercice 1.

D'un point de vue optique, un microscope est constitué d'un objectif et d'un oculaire que l'on assimile à des lentilles minces convergentes (L_1) et (L_2) de même axe optique et de focales $f'_1 = 0,4$ cm et $f'_2 = 2,5$ cm. On note $\Delta = F'_1 F'_2 = 16$ cm l'intervalle optique.

1. Déterminer la position sur l'axe optique d'un objet AB que l'œil voit nettement sans accommoder.
2. Pour cette position de l'objet, réaliser une construction à l'échelle du parcours d'au moins deux rayons lumineux issus de B .

Commercialement, on définit le grossissement d'un instrument d'observation de petits objets par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ où

- α' désigne l'angle sous lequel on aperçoit l'image à l'infini de l'objet ;
- α désigne l'angle sous lequel on apercevrait à l'œil nu cet objet placé au punctum proximum distant de $\delta = 25$ cm.

Les constructeurs de microscope indiquent généralement sur l'appareil le grandissement associé à l'objectif (par exemple $\times 100$, $\times 50$) et le grossissement associé à l'oculaire (par exemple $\times 10$, $\times 20$).

3. Que vaut ici le grandissement associé à l'objectif γ_{obj} ?
4. Que vaut ici le grossissement associé à l'oculaire G_{oc} ?
5. Établir l'expression du le grossissement du microscope dans son ensemble en fonction de G_{oc} et γ_{obj} .
6. Dans cette question, on suppose que l'observateur place son œil en F'_2 et qu'il peut accommoder à volonté. Déterminer la latitude de mise au point, c'est à dire l'extension sur l'axe optique de l'ensemble des points A qu'il peut voir nettement. Commenter.
7. La monture circulaire de l'objectif présente un diamètre $D = 7$ mm. On appelle cercle oculaire l'image de cette monture à travers l'oculaire. Déterminer sa position et son diamètre. Quel est l'intérêt de placer l'œil sur ce cercle pour observer dans le microscope ?

Exercice 2.

Un anneau de masse M et de rayon a , contenu dans un plan vertical, repose sur une table. Deux perles de même masse m , initialement situées au sommet de cet anneau, coulissent sans frottement sur son périmètre sous l'effet de la gravité, symétriquement l'une de l'autre par rapport à la verticale. On repère leur mouvement par l'angle θ représenté sur la figure 1.

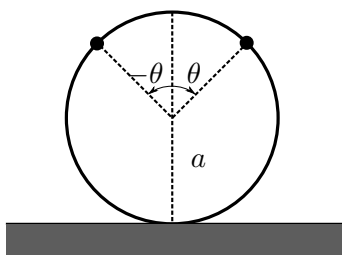


FIGURE 1

1. Trouver, en fonction de g , a et θ , l'expression de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ des perles lorsqu'elles ont atteint la position repérée par l'angle θ .
2. Exprimer, en fonction de m , g et θ , les forces de réaction \vec{F}_d et \vec{F}_g exercées par l'anneau sur la perle située à droite et sur celle située à gauche respectivement.
3. Ici, les perles sont enfilées sur l'anneau, ce qui leur interdit de le quitter. S'il s'agissait de billes *glissant sur l'anneau*, pour quelle valeur de θ le quitteraient-elles ?
4. Pendant ce mouvement, l'anneau reste immobile. Donner l'expression de la réaction R exercée par la table sur l'anneau.
5. Justifier que l'anneau peut décoller et trouver le rapport m/M minimal pour que cela arrive.

Exercice 3.

On considère deux dominos D_1 et D_2 de masse m , de longueur a et de hauteur h , posés l'un sur l'autre comme le montre la figure (2). Le domino supérieur D_1 est décalé d'une manière qu'une portion de longueur b_1 surplombe le vide. On se demande quelle est la valeur maximale de b_1 compatible avec l'équilibre du système. On note \vec{R}_1 la réaction exercée par D_2 sur D_1 . Dans tout le problème, ce sont des situations d'équilibre qu'on considère. On note G_i et C_{i-1} le centre de masse et le coin supérieur droit du domino D_i .

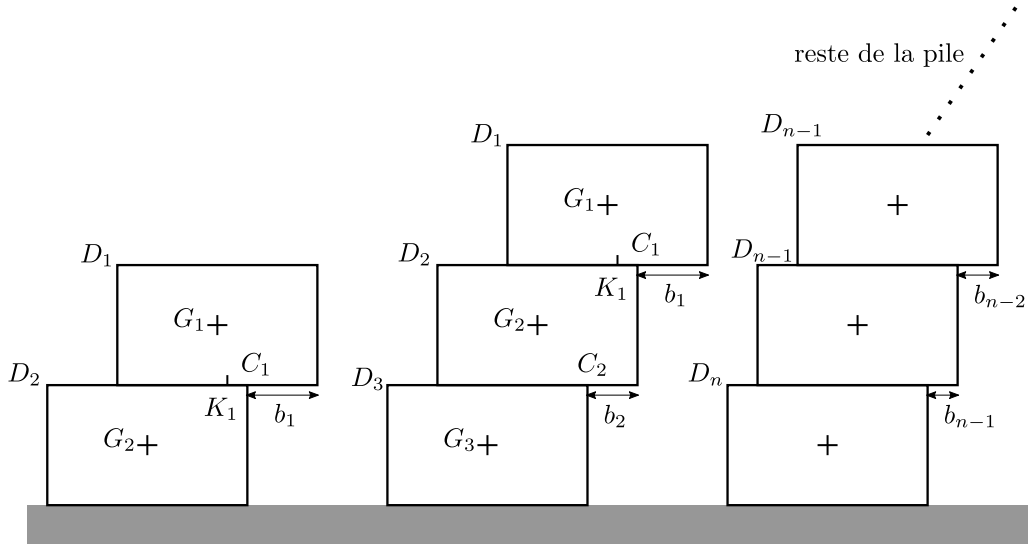


FIGURE 2 – Piles comportant deux dominos, puis trois dominos, puis n dominos.

- Déterminer \vec{R}_1 et montrer que son point d'application K_1 se situe à la verticale de G_1 .
- En déduire que la valeur maximale de b_1 est $a/2$. Dans ce cas limite, où la réaction \vec{R}_1 s'applique-t-elle ?
- Les dominos D_1 et D_2 étant ainsi disposés avec $b_1 = a/2$, on place leur ensemble sur un troisième domino D_3 identique. On note \vec{R}_2 la réaction exercée par D_3 sur D_2 . On cherche le surplomb b_2 maximal de D_2 par rapport à D_3 .
À quelles forces D_2 est-il soumis ? Où s'appliquent-elles dans le cas limite ? En considérant l'équilibre de D_2 , trouver la valeur maximale de b_2 .
- On peut établir le résultat précédent d'une autre manière. On considère l'ensemble formé de D_1 et D_2 comme un tout de centre de masse G , et on raisonne pour ce système composite comme pour D_1 dans la question 1. On choisit l'origine des abscisses sur C_2 . Exprimer l'abscisse x_G en fonction de a et b_2 , puis retrouver le résultat de la question précédente.
- On considère maintenant une pile de n dominos présentant des surplombs b_1, b_2, \dots, b_{n-1} . Les valeurs de b_1, b_2, \dots, b_{n-2} correspondent à la limite de l'équilibre et on cherche la valeur maximale de b_{n-1} . Démontrer que $b_{n-1} = a/[2(n-1)]$.
- Le surplomb total entre le domino supérieur et le domino inférieur est $V_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$. Quelle remarque peut-on formuler sur ce résultat ? Avec des dominos de longueur $a = 3$ cm, pourriez-vous réaliser un surplomb d'un mètre ? La vérification expérimentale de la réponse constitue un défi très amusant !

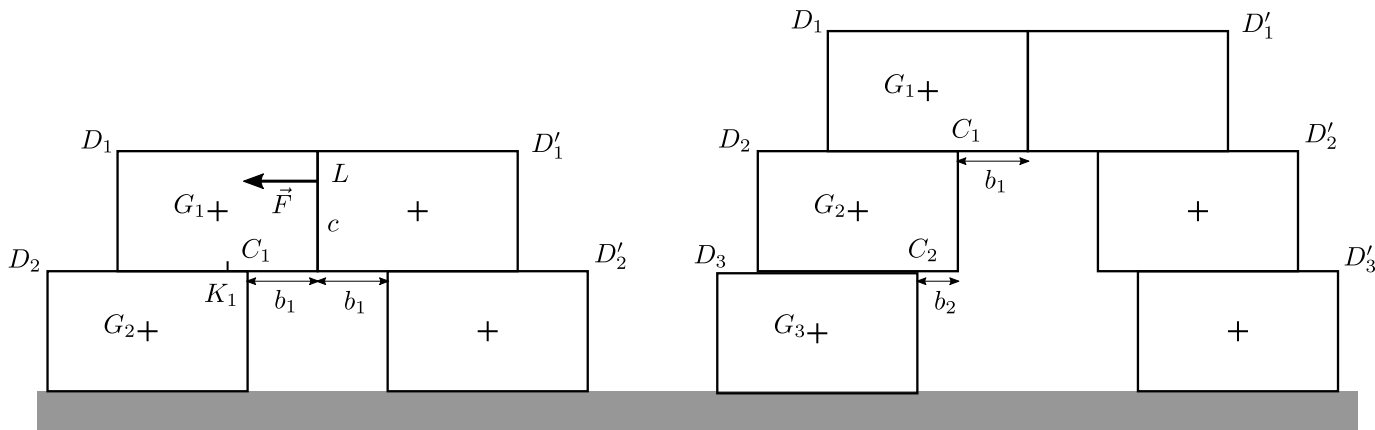
On peut prolonger la réflexion en envisageant deux piles de dominos placées l'une contre l'autre. C'est l'objet de l'exercice intitulé « voute de dominos ».

Exercice 4.

Cet exercice constitue un prolongement naturel de celui intitulé « pile de dominos », mais il a été rédigé de manière à pouvoir être traité indépendamment.

On considère tout d'abord quatre dominos identiques D_1, D_2, D'_1 et D'_2 , de longueur a , de hauteur h et de masse m , disposés comme le montre la figure (3). Le domino D_1 surplombe D_2 d'une longueur b_1 . La situation est supposée parfaitement symétrique géométriquement et du point de vue de la répartition des efforts.

- On note \vec{F} la force de contact exercée par D'_1 sur D_1 , et L son point d'application repéré par la longueur c . Trouver au argument justifiant que \vec{F} est dirigée selon l'horizontale.

FIGURE 3 – Voute formée par 4 dominos, puis 6 dominos, puis $2n$ dominos.

- On note $\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{T}_1$ la réaction exercée par D_2 sur D_1 , somme d'une composante normale et d'une composante tangentielle. Cette force s'exerce en K_1 , à la distance d à gauche de C_1 . À l'équilibre, trouver une relation entre a , b_1 , c , d , F et mg .
- On note μ le coefficient de frottement entre les dominos. Quelle est la valeur maximale de F compatible avec l'équilibre? Quelles sont les valeurs limites de d et h ? En déduire que la valeur maximale de b_1 est

$$b_1 = \frac{a}{2} + \mu h \quad .$$

- Les quatre premiers dominos étant disposés dans la situation limite ci-dessus, on les pose sur deux autres dominos identiques D_3 et D_3' . L'ensemble est toujours supposé symétrique. On cherche le surplomb maximal b_2 de D_2 par rapport à D_3 . On note $\vec{R}_2 = \vec{N}_2 + \vec{T}_2$ la réaction exercée par D_3 sur D_2 . Dans le cas limite, où les réaction \vec{R}_1 et \vec{R}_2 s'appliquent-elles? Que valent les normes T_1 et T_2 à la limite du glissement? En déduire l'expression de la valeur maximale de b_2 .
- On considère maintenant une voute formée de $2n$ dominos. De chaque côté, les $(n - 2)$ dominos supérieurs sont à la limite de l'équilibre et on cherche le surplomb maximal b_{n-1} de D_{n-1} par rapport à D_n (cette situation générale n'est pas représentée sur la figure). En généralisant les raisonnements précédents, trouver l'expression limite de b_{n-1} en fonction de a , μ , h et n .

Exercice 5.

Un cube de masse m repose sur une surface horizontale avec un coefficient de frottement μ (figure 4). Par l'intermédiaire d'un fil, on exerce sur son arête supérieure droite une force F dont la direction est repérée par l'angle α appartenant à $[0, \pi/2]$. On envisage la possibilité d'un début de basculement de ce cube autour de l'arête passant par C . Ce mouvement est supposé quasi-statique, c'est à dire qu'un équilibre est réalisé à tout instant. Formellement, si on note θ l'angle de rotation autour de la droite passant par C et perpendiculaire à la figure, on analyse la situation pour laquelle $\theta = 0$ et $\dot{\theta} \rightarrow 0$.

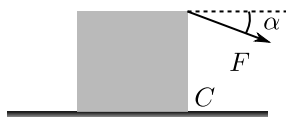


FIGURE 4 – basculement d'un cube.

- Pour l'instant, C est supposé fixe. Pour α donné, quelle est la valeur minimale de F qui permettra au cube de commencer à basculer?
- Quel angle α_{\min} permet de minimiser cette force? Comment s'exprime la force minimale F_{\min} correspondante?
- En réalité, C n'est pas fixé. Le cube repose sur la table avec un coefficient de frottement μ . Trouver la plus petite valeur de μ_{\min} de μ qui permet de faire basculer le cube en le tirant sous l'angle α_{\min} avec la force F_{\min} .

4. Si $\mu < \mu_{\min}$, l'angle α_{\min} identifié précédemment ne convient pas. Montrer que l'angle optimal α'_{\min} qui permet de faire basculer le cube sans glisse vérifie

$$\tan \alpha'_{\min} = \frac{1 - 2\mu}{\mu} .$$

5. Exprimer la force F'_{\min} correspondante en fonction de m , μ et g . On simplifiera le résultat pour ne pas faire intervenir de fonction trigonométrique.

Exercice 6.

1. On désire réaliser un système électronique linéaire réalisant une fonction retard, c'est à dire telle que l'entrée e et la sortie s soient en régime permanent liées par une relation du type

$$s(t) = e(t - \tau)$$

où τ est le retard, valeur fixée indépendante de la fréquence. En exprimant cette relation en notation complexe, trouver la fonction de transfert $\underline{F}(j\omega)$ de ce système. Tracer le diagramme de Bode.

2. En supposant $\omega\tau \ll 1$, effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $\underline{F}(j\omega)$.
3. Pour réaliser cette fonction, on utilise le dispositif schématisé sur la figure 5. La résistance R représente la charge (le dipôle d'utilisation) sur laquelle le retardateur est branché. Déterminer la fonction de transfert \underline{H} de ce système. De quel type de filtre s'agit-il?
4. En se plaçant dans la limite des basses pulsations, effectuer un développement au second ordre de \underline{H} en puissances de ω .
5. Montrer que si l'on choisit convenablement R , ce filtre réalise de manière approchée le retardateur envisagé dans la première question. Que vaut alors τ ? Les résultats sont à donner en fonction de L et de C .

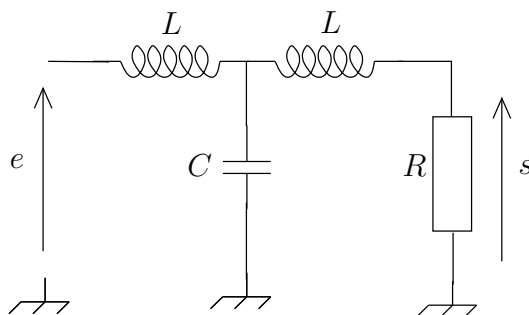


FIGURE 5

Exercice 7.

Un hémisphère de masse M de rayon R est posé sur un plan horizontal. À son sommet, on a pratiqué un petit orifice qui le fait communiquer avec l'air ambiant de pression P_0 et par lequel on introduit très progressivement de l'eau de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur h qui s'élève peu à peu (figure 6).

1. Exprimer la pression de l'eau en un point de la surface repéré par sa colatitude θ .
2. Exprimer en fonction de ρ , g et h la résultante des forces de pression que l'eau et l'air ambiant exercent sur l'hémisphère.
3. Trouver la hauteur h pour laquelle l'hémisphère se décolle du support.

Exercice 8.

On suppose l'atmosphère en équilibre à la température uniforme $T = 270, \text{K}$ et on la traite comme un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$. Établir l'expression de la pression et de la masse volumique en fonction de l'altitude en notant P_0 et ρ_0 leurs valeurs au niveau du sol. À quelle altitude la pression est-elle divisée par 2 par rapport à la valeur au sol?

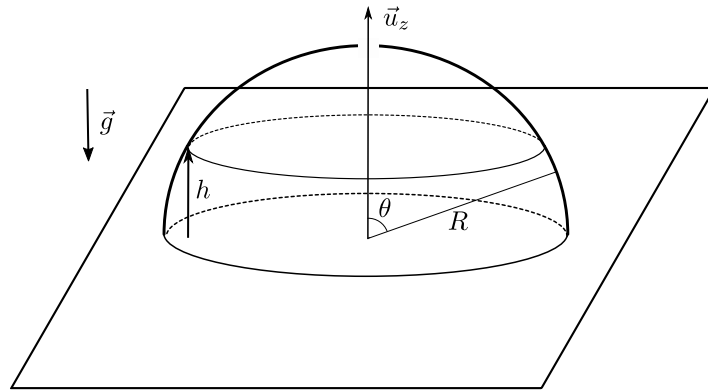


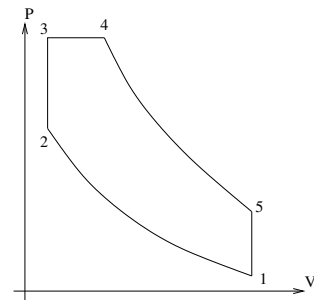
FIGURE 6

Exercice 9.

Soit une pompe à chaleur cyclique destinée à chauffer une maison de température constante égale à 20°C en exploitant l'air extérieur de température égale à 10°C . Majorer son efficacité et la comparer à celle d'une machine commerciale (à rechercher en ligne). Commenter l'écart des deux valeurs.

Exercice 10.

On modélise les transformations de l'air dans un moteur à explosion par un cycle de Sabathe (figure ci-contre). Les étapes $1 \rightarrow 2$ et $4 \rightarrow 5$, adiabatiques et réversibles, correspondent aux mouvements du piston. La combustion de l'essence s'effectue pendant les étapes $2 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 4$. On note $a = V_1/V_2$ le rapport volumétrique de compression, $b = P_3/P_2$ la surpression et $s = V_4/V_3$ le rapport de surchauffe. L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique.



1. On rappelle que l'entropie d'un gaz parfait s'exprime à une constante près par

$$S = nC_{vm} \ln T + nR \ln V \quad S = nC_{pm} \ln T - nR \ln P \quad .$$

Représenter ce cycle dans un diagramme ayant l'entropie S en abscisse et la température T en ordonnée.

2. Exprimer le rendement en fonction des températures T_i ($i \in \{1..5\}$), puis en fonction de a , b , r et $\gamma = C_{pm}/C_{vm}$.
3. Application numérique : $a = 9$, $b = 2,5$, $s = 1,5$. Comparer le rendement à la valeur maximale théorique pour un cycle ditherme dont la source froide et la source chaude posséderaient respectivement les températures minimales et maximales de l'air dans le cycle de Sabathe.

Exercice 11.

À pression ambiante, un récipient calorifugé contient 1kg l'eau liquide à une température T_0 inférieure à sa température de fusion $T_f = 273\text{ K}$.

1. Comment s'appelle ce phénomène ? Décrire une situation expérimentale dans laquelle il se produit.
2. Par un léger choc, on provoque le passage d'une partie (ou de toute) l'eau liquide à l'état de glace. Quelle doit être T_0 pour que dans l'état final, 50 % de l'eau soit solidifiée ? À quelle condition peut-elle se solidifier entièrement ?
3. Dans le cas où l'eau se solidifie entièrement, exprimer la température finale T_1 en fonction de T_0 , c_ℓ , c_g et l_f . Calculer T_1 pour $T_0 = -100^\circ\text{C}$.

Données : enthalpie de fusion de l'eau $l_f = 330\text{ kJ.kg}^{-1}$, capacité calorifique de l'eau liquide $c_\ell = 4,18\text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$, capacité calorifique de la glace : $c_g = 2,09\text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Exercice 12.

L'espace est divisé en deux régions par le plan d'équation $y = 0$. L'une d'elles ($y > 0$) est le siège d'un champ magnétique $\vec{B}_1 = B_1\vec{u}_z$, l'autre ($y < 0$) d'un champ magnétique $\vec{B}_2 = B_2\vec{u}_z$, avec $B_2 > B_1 > 0$. À $t = 0$, un

électron de masse m et de charge $-e$ est émis depuis l'origine des coordonnées avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_y$ ($v_0 > 0$) et pénètre dans la région où règne \vec{B}_1 .

a) Quel est le mouvement de l'électron durant les premiers instants? Le représenter par un dessin et démontrer l'expression d'une longueur caractérisant la trajectoire.

b) À quelle date l'électron pénètre-t-il dans la région où règne \vec{B}_2 ? Quel son mouvement tant qu'il reste dans cette seconde région?

c) Représenter par un dessin son mouvement ultérieur puis définir une vitesse de dérive caractérisant le mouvement moyen. L'exprimer en fonction de B_1 , B_2 , e , m et v_0 .

Exercice 13.

On considère le montage de la figure 7 dans lequel on note $M = kL$ le coefficient de mutuelle induction, avec $|k| < 1$. On pose par ailleurs $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = RC\omega_0$. À l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé et on ferme l'interrupteur.

1. Exprimer la loi des mailles dans chacun des deux circuits.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur.
3. Avec les valeurs numériques $Q = 1$ et $k = 1/2$, déterminer l'évolution de q et de i' au cours du temps puis représenter les graphes correspondants.

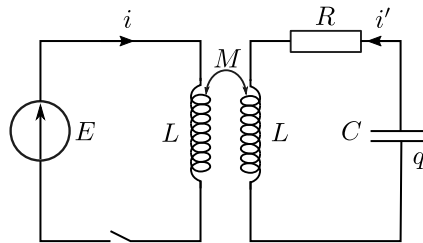


FIGURE 7 – Circuits couplés en régime transitoire

Pour les exercices d'induction qui suivent, on prendra soin de préciser sur un schéma les orientations choisies pour calculer le flux, la fem induite et l'intensité.

Exercice 14.

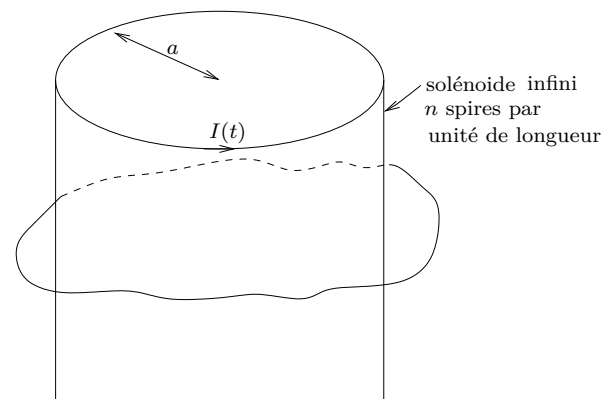
1. Un solénoïde infini de rayon a comportant n spires par unité de longueur est parcouru par un courant d'intensité $I = I_0 \cos(\omega t)$. Décrire le champ magnétique qu'il produit et donner son expression.

2. Ce solénoïde est entouré par un fil électrique de résistance totale r formant un circuit fermé. Pourquoi un courant circule-t-il dans ce fil? Quelle est son intensité i ?

3. Un autre fil de même résistance, formant une boucle circulaire de rayon $r < a$, est placé à l'intérieur du solénoïde, de sorte que son axe de symétrie soit parallèle celui du solénoïde. Même question.

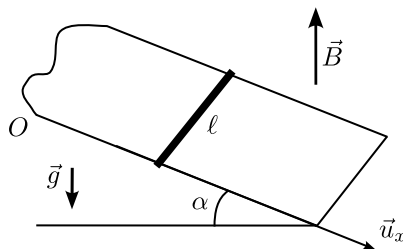
4. Dans chacun des deux cas précédents, donner l'expression du coefficient de mutuelle induction entre le fil et le solénoïde.

5. C'est maintenant le fil qui est alimenté par un générateur assurant l'intensité $i(t) = i_0 \cos \omega t$. Les bornes du solénoïde sont connectées entre elles en court-circuit et il présente une résistance R . Exprimer dans chacun des deux cas l'intensité qui circule dans le solénoïde.



Exercice 15.

Une barre conductrice de longueur ℓ et de résistance électrique R forme un circuit fermé avec deux rails parallèles et un fil de cuivre de résistances négligeables. Ces rails sont disposés parallèlement l'un à l'autre selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. La barre leur est perpendiculaire et peut glisser sans frottement à leur contact. On note x son abscisse mesurée le long des rails par rapport à l'origine située à l'extrémité supérieure de rails. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur et dans un champ magnétique constant uniforme vertical \vec{B} .

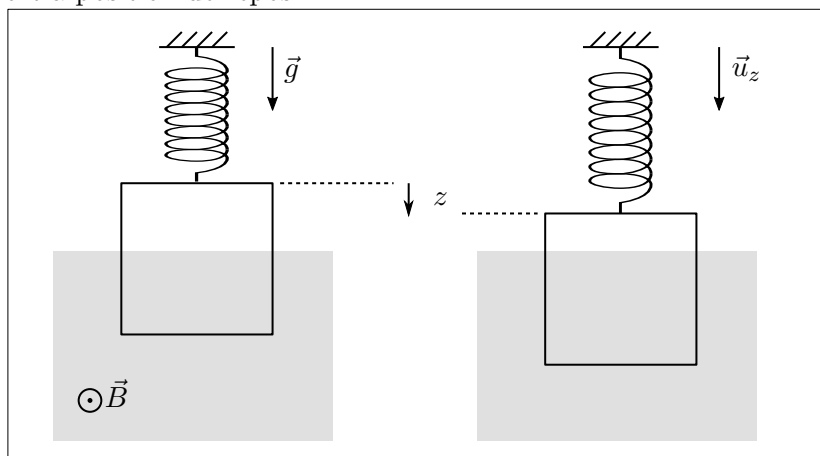


1. Exprimer, à un terme constant près, le flux magnétique au travers du circuit.
2. En déduire l'expression de l'intensité i dans le circuit, en fonction notamment de la vitesse v de la barre.
3. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de v au fil du temps.
4. Déterminer l'expression de $v(t)$ et tracer l'allure du graphe correspondant.
5. Procéder à un bilan énergétique et le commenter.

Exercice 16.

Un cadre de cuivre filiforme, de masse m et de résistance électrique R , a la forme d'un carré de côté a . Il est suspendu verticalement à un ressort de raideur k de sorte qu'à l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est située dans une région où règne un champ magnétique \vec{B} horizontal et uniforme.

On abaisse de cadre d'une distance $a/2$ et on l'abandonne sans vitesse initiale. On repère son mouvement par son déplacement z par rapport à position de repos.



1. Décrire qualitativement, le plus précisément possible, les phénomènes qui se déroulent un fois qu'on a lâché le cadre.
2. Exprimer en fonction de z , B et a le flux magnétique traversant le cadre.
3. En déduire une expression de l'intensité i circulant dans le cadre.
4. Exprimer la somme des forces s'exerçant sur le cadre.
5. Étudier le mouvement du cadre et exprimer z en fonction du temps en distinguant divers cas.

Voyage entre la Terre et Mars

Centrale-Supélec

Cet extrait de problème est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie.

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

I.A – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique

Q 1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

Q 2. Montrer que le moment cinétique \vec{L}_O en O , centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.

Q 3. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z tel que $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de L_O et m . Quel est le nom de cette grandeur ?

Q 4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R , la vitesse V de l'objet en fonction de G , M_S , R et m . Calculer les valeurs numériques de V_T , la vitesse orbitale de la Terre et de V_M , celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.B – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler

Q 5. Dédire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G , M_S , R et m .

Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G , M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe de la trajectoire.

I.C – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann).

La position de la Terre au temps $t = 0$ du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T , a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T .

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t=0) - \theta_T(t=0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Q 11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

I.D – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

Q 12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

Q 13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta \vec{V}_T$ colinéaire à \vec{V}_T plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t=0) = 0$) et on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$. On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

Q 15. Justifier que r_P , le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie $r_P = a_T$.

Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique. Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m , V_T et e .

Q 18. En déduire la vitesse V_T'' que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e .

Q 19. Donner, en fonction de V_T et e , la variation de vitesse $\Delta V_T' = V_T'' - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert. Calculer la valeur numérique de $\Delta V_T'$.

Q 20. Exprimer $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ en fonction de a_T et V_T'' .

Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.

On donne :
$$\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = 2,15$$
 avec l'excentricité calculée en question 16.

Données

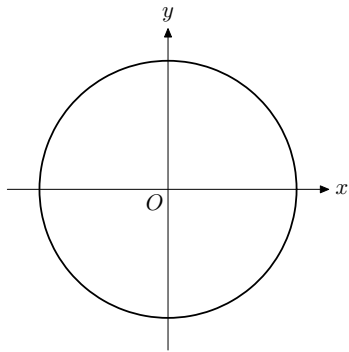
Masse du Soleil	$M_S = 2,00 \times 10^{30}$ kg
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150 \times 10^6$ km
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228 \times 10^6$ km
Constante gravitationnelle	$G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9,81$ m·s ⁻²
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365$ jours
Période de révolution de Mars	$T_M = 687$ jours

Formulaire

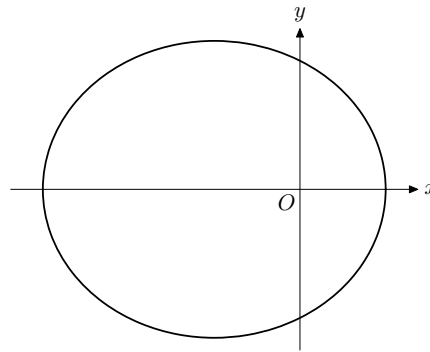
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

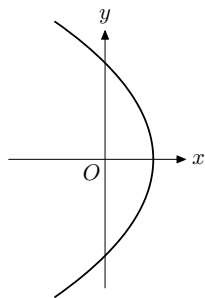
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



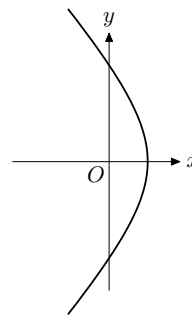
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

DOCUMENT RÉPONSE

Questions 7 et 10

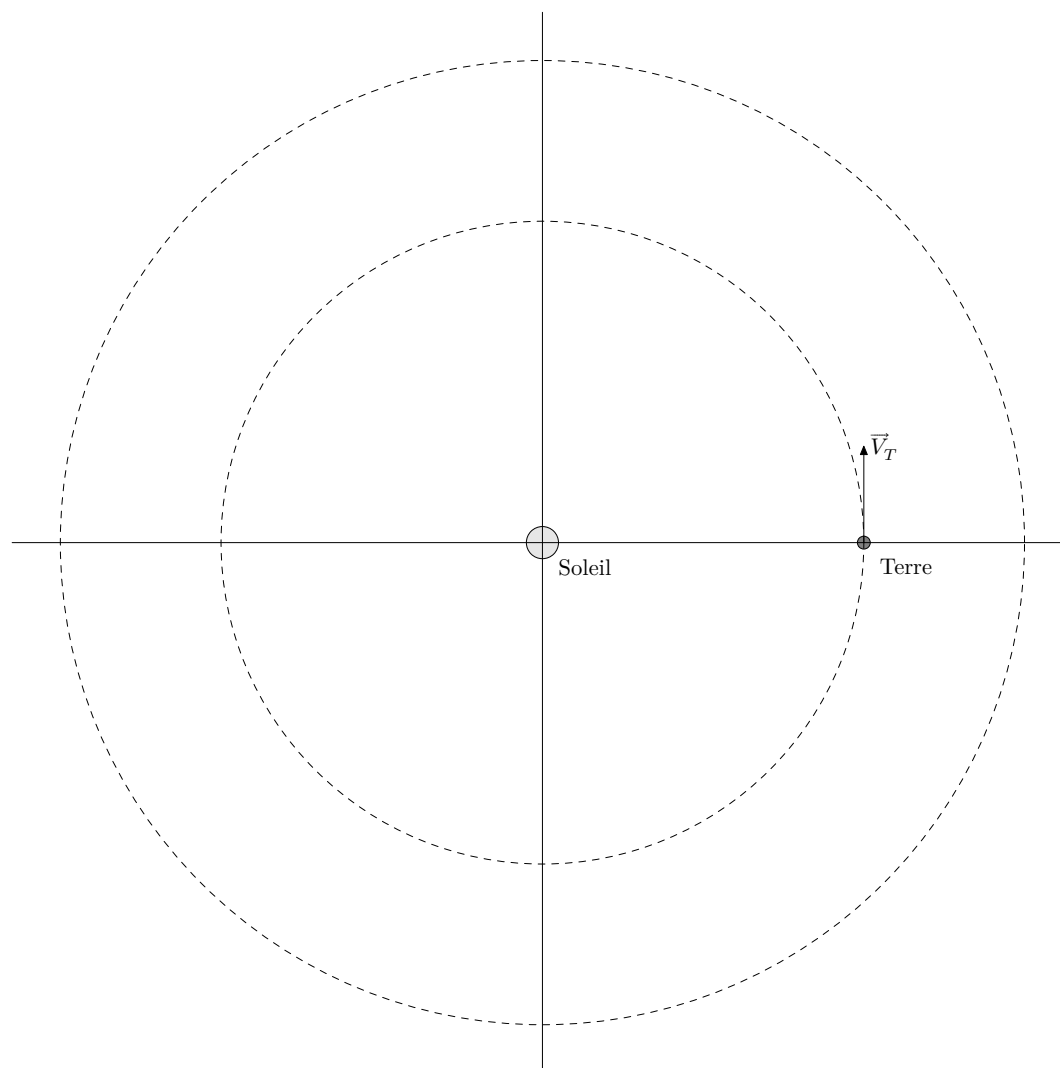


Figure A

Questions 14 et 16

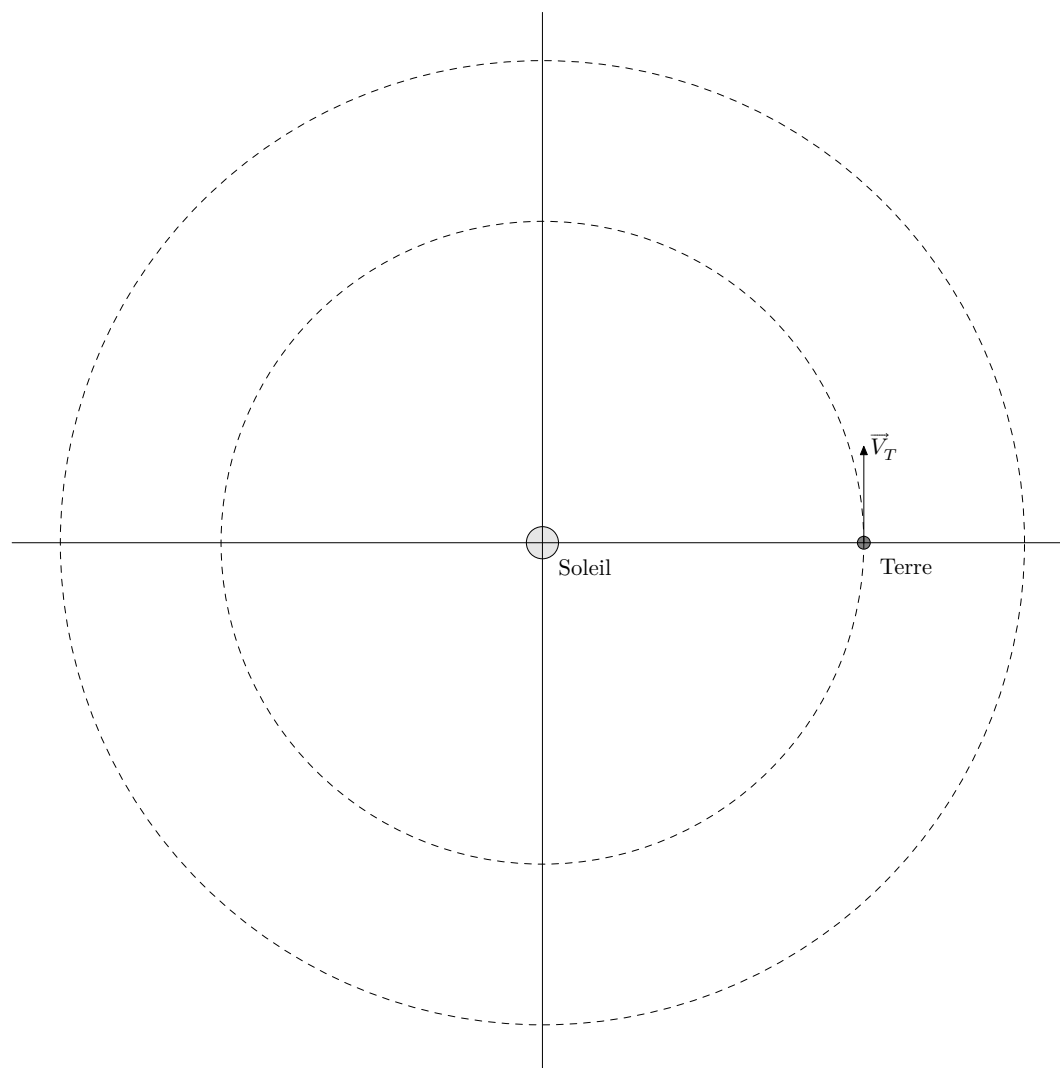


Figure B