

Devoir de vacances de mathématiques — PC*

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Ne pas rendre de copie déchirée ou découpée.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1 — intégrales de Wallis et équivalent de Stirling (*)

Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) \, dt$.

Le but de ce problème est de calculer cette intégrale et d'étudier la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis d'en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

Première partie : les calculs classiques sur les intégrales de Wallis

Question 1. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

Question 2. Calculer les intégrales W_0 et W_1 .

Question 3. Au moyen d'une intégration par parties, obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

Question 4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'encadrement suivant

$$\frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Question 5. Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

Question 6. Montrer que W_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver les relations suivantes

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} \times (p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p} \times (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Deuxième partie : l'équivalent de Stirling

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $q_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(q_n)$.

Question 8. Pour tout entier $n \geq 2$, prouver l'égalité $u_n - u_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$.

Question 9. Prouver que $u_n - u_{n-1}$ est équivalent à $-\frac{1}{12n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. Justifier que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Question 11. En déduire que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une limite finie ℓ strictement positive.

Question 12. En écrivant de deux manières la limite de $\sqrt{2p} W_{2p}$ quand p tend vers $+\infty$, obtenir l'égalité $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 1. Identité de Vandermonde (*)

Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N}^3$. Démontrer par deux méthodes l'égalité $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

Méthode 1. Partir de l'égalité $(X+1)^a(X+1)^b = (X+1)^{a+b}$ et se concentrer sur un coefficient bien choisi.

Méthode 2. Combien y a-t-il de manières de constituer une corbeille de n fruits à partir d'un lot de a abricots et b bananes ?

Exercice 2. (*)

Question 13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\text{Arctan}(x)$ est un argument du nombre complexe $1 + ix$.

Question 14. Simplifier $\text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(5) + \text{Arctan}(8)$.

Exercice 3. (*) Soient A, B, C trois $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(A, B)$ et $g \in \mathcal{L}(B, C)$. On note φ la restriction de g à $\text{Im}(f)$.

Question 15. Démontrer les égalités $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(g \circ f)$.

Question 16. On suppose que A est de dimension finie. Montrer l'égalité $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$.

Exercice 4. ()** Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On suppose que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Id}_E$.

Indication. Toute solution de deux ou trois lignes est fausse.

Exercice 5. ()** Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que l'inclusion $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(v)$ a lieu si, et seulement si, il existe $h \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant $u = v \circ h$.

Indication. Utiliser le théorème du rang en version géométrique.

Exercice 6. (*) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $\lambda \geq 0$. On note λA l'ensemble $\{\lambda x ; x \in A\}$.

Montrer l'égalité $\sup(\lambda A) = \lambda \times \sup(A)$.

Exercice 7. (*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Justifier l'égalité $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$.

Problème 2 (*) Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Question 17. Justifier que la fonction f est bien définie et préciser son signe.

Question 18. Justifier que la fonction f est de classe C^1 sur $]0, 1[$ et exprimer sa dérivée.

Question 19. ()** Justifier que la fonction f a une limite nulle en 0.

Question 20. Pour tout $x \in]0, 1[$, calculer $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)}$.

Question 21. En déduire un encadrement de $f(x)$ puis trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Problème 3 ()**

On pose $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. On lui associe les sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E ; f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E ; f'' = f\}.$$

Pour tout couple (f, g) d'éléments de E , on pose $(f|g) = \int_0^1 (fg + f'g')$.

Question 22. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

Question 23. Déterminer une base orthonormée de G .

Question 24. Montrer que F et G sont supplémentaires et orthogonaux dans E .

Question 25. Donner l'expression de la projection orthogonale sur G .

Problème 4 — réarrangement de la somme d'une suite sommable (*)**

On considère une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} z_n$ est absolument convergente. Le but de cet exercice est de prouver que pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} z_{\varphi(n)}$ converge absolument et qu'elle a la même somme que la série $\sum z_n$.

On considère donc une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et on pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

Question 26. Prouver qu'il existe un entier n_0 vérifiant la propriété

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Question 27. Prouver qu'il existe un entier n_1 tel que l'inclusion

$$[0, n_0] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}$$

soit vraie.

Question 28. Pour tout entier $n \geq n_1$, prouver la majoration

$$\left| S - \sum_{k=0}^n z_{\varphi(k)} \right| \leq \varepsilon.$$

Question 29. Conclure.

Problème 5 (*)

On lance deux dés équilibrés à n faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires U_1 et U_2 , supposées indépendantes.

On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

a. Déterminer la loi et l'espérance de X .

b. Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire l'espérance de Y .

c. Calculer de même XY et en déduire la covariance de (X, Y) .

Sudoku « PC* 2026-2027 »

Placer dans chaque case un chiffre entre 1 et 9 de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré 3×3 délimité en gras contiennent exactement une fois chaque chiffre.

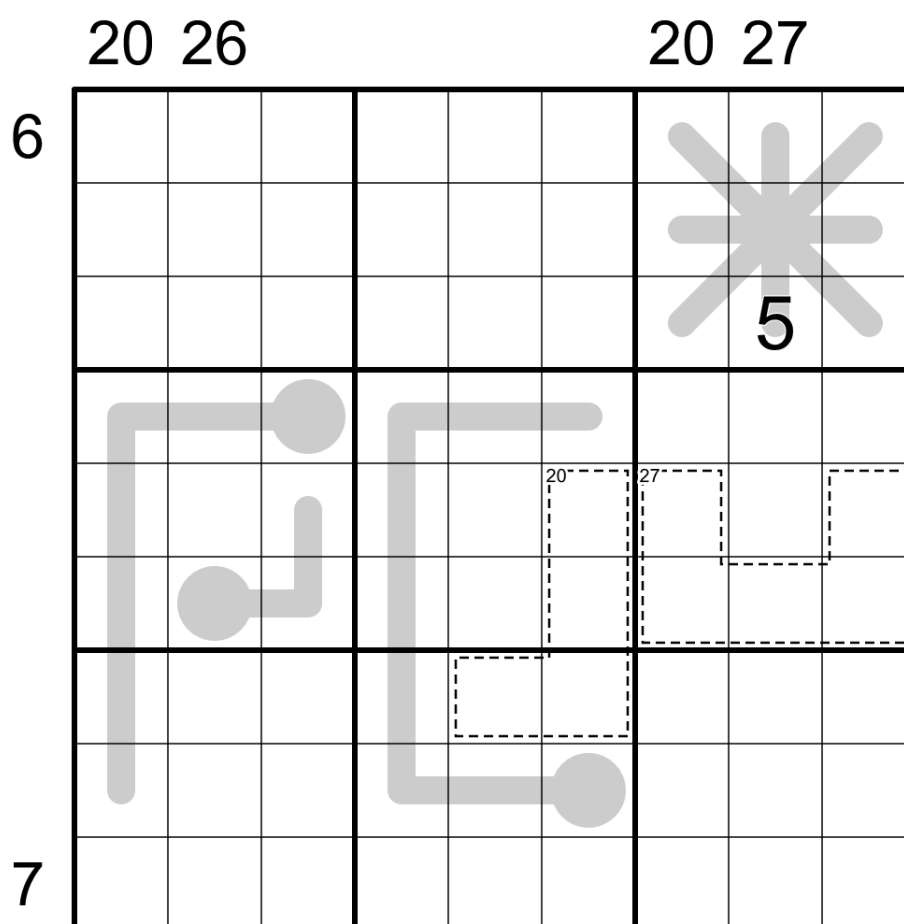
Thermo. Le long de chaque thermomètre, les chiffres augmentent strictement en partant du bulbe. L'étoile dans le coin supérieur droit est la superposition de huit thermomètres issus du centre de l'étoile.

Killer. Dans chaque cage délimitée en pointillés, les chiffres sont tous différents et leur somme est indiquée dans un coin de la cage.

Sandwich. Chaque indice au-dessus de la grille est la somme des chiffres pris en sandwich entre le 1 et le 9 de la colonne correspondante.

Numbered Rooms. Chaque chiffre à gauche de la grille doit être placé dans la n -ième case de sa ligne, où b est le premier chiffre de sa ligne.

Lien (cliquable) pour résoudre ce problème en ligne : <https://sudokupad.app/fd1exx222a>



Pour me contacter : edouardlebeau-pc@yahoo.fr ou [edouardlebeau.nancy](#) sur Discord.

Site de la classe (lien cliquable) : https://cahier-de-prepa.fr/pc*-poincare