

Méthodes et rédaction

1 Racines carrées d'un nombre complexe

Exercice résolu. On pose $w = 3 + 4i$. Trouver les racines carrées de w .

Solution. Le nombre complexe w admet deux racines carrées non réelles, opposées l'une de l'autre. Notons z celle qui a une partie imaginaire strictement positive.

On écrit z sous la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'égalité $z^2 = w$ donne

$$a^2 - b^2 + i2ab = 3 + 4i.$$

En identifiant les parties réelles d'une part, les parties imaginaires d'autre part, on obtient

$$a^2 - b^2 = 3 \quad \text{et} \quad ab = 2.$$

On connaît aussi l'égalité $a^2 + b^2 = |z|^2$, qui donne $a^2 + b^2 = |w| = 5$.

On en tire l'égalité $b^2 = 1$. La positivité de b donne $b = 1$. La relation $ab = 2$ donne $a = 2$.

Les racines carrées de w sont donc $\pm(2 + i)$.

2 Relation de récurrence d'ordre deux

Exercice résolu n° 1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Trouver une expression explicite de u_n .

Solution. L'équation caractéristique s'écrit

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont 2 et 3 donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a2^n + b3^n.$$

Les valeurs de u_0 et u_1 donnent

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 3b = 4 \end{cases}$$

La combinaison $3L_1 - L_2$ donne $a = -1$.

La combinaison $L_2 - 2L_1$ donne $b = 2$.

On obtient donc finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -2^n + 2 \times 3^n.$$

Remarque d'ordre logique. J'ai déterminé les constantes par *déductions* et non par équivalences. Le système à résoudre est constitué d'*égalités vraies* donc il est inutile de chercher dans quels cas il est vrai ou faux.

Exercice résolu n° 2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n.$$

Trouver une expression explicite de u_n .

Solution. L'équation caractéristique s'écrit

$$r^2 - 2r + 4 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont $1 \pm i\sqrt{3}$. On remarque que $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n (a \cos(n\pi/3) + b \sin(n\pi/3)).$$

Les valeurs de u_0 et u_1 donnent

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ a + \sqrt{3}b & = & 4 \end{cases} \quad \text{donc} \quad b = \sqrt{3}.$$

On obtient donc finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n (\cos(n\pi/3) + \sqrt{3} \sin(n\pi/3)).$$

Exercice résolu n° 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \cos(n\alpha)$.

Trouver une relation de récurrence d'ordre 2 pour la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Une formule d'Euler donne

$$c_n = \frac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2}.$$

La formule de Moivre donne alors

$$c_n = \frac{1}{2} (e^{i\alpha})^n + \frac{1}{2} (e^{-i\alpha})^n.$$

Les nombres $r = e^{i\alpha}$ et $s = e^{-i\alpha}$ vérifient les égalités

$$rs = 1 \quad \text{et} \quad r + s = 2 \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad (X - r)(X - s) = X^2 - 2X \cos(\alpha) + 1.$$

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie donc la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} - 2 \cos(\alpha) c_{n+1} + c_n = 0.$$

Remarque. Cette relation de récurrence peut alors donner naissance aux *polynômes de Chebyshev*.

Elle permet aussi de montrer que dans le cas où $\cos(\alpha) \neq 1$, la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

3 Démonstration par récurrence

Exercice résolu n° 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appelons (C_n) l'assertion $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

L'assertion (C_0) s'écrit $\sum_{k=0}^0 k^2 = 0$. Elle est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'assertion (C_n) est vraie. On trouve alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)).$$

Un premier développement donne $n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6$.

Un deuxième développement donne $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$ donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

si bien que (C_{n+1}) est vraie.

Par récurrence, on a alors prouvé que l'assertion (C_n) est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarques de méthode. J'ai factorisé par $(n+1)$ avant de développer. On gagne du temps en factorisant.

Plutôt que de chercher à factoriser $2n^2 + 7n + 6$, j'ai utilisé la connaissance du résultat souhaité pour effectuer un calcul plus direct.

Exercice résolu n° 2. On définit une suite de polynômes réels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $P_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

Solution. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons (E_n) l'égalité $P_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

On remarque que $P_0(\cos(t)) = 1 = \cos(0 \times t)$ et $P_1(\cos(t)) = \cos(t)$ donc (E_0) et (E_1) sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que (E_n) et (E_{n+1}) sont vraies, ce qui s'écrit

$$P_n(\cos(t)) = \cos(nt) \quad \text{et} \quad P_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t).$$

On trouve alors

$$P_{n+2}(\cos(t)) = 2\cos(t)P_{n+1}(\cos(t)) - P_n(\cos(t)) = 2\cos(t)\cos((n+1)t) - \cos(nt).$$

On a vu au paragraphe 2 que $\cos((n+2)t) - 2\cos(t)\cos((n+1)t) + \cos(nt) = 0$ donc $P_{n+2}(\cos(t)) = \cos((n+2)t)$.

L'assertion (E_{n+2}) est donc vraie.

Par récurrence d'ordre 2, l'assertion (E_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque de méthode. Pour montrer l'hérédité, j'ai eu besoin de supposer (E_n) et (E_{n+1}) . L'hypothèse (E_n) seule n'aurait pas suffi.

4 Variations strictes d'une fonction d'une variable

Exercice résolu n° 1. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto x - \ln(x+1)$ est positive sur $] -1, +\infty[$ et qu'elle s'annule uniquement en 0.

Solution. La fonction φ est dérivable sur $] -1, +\infty[$, avec

$$\forall x \in] -1, +\infty[, \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

donc $\varphi'(x)$ a le signe de x . On en déduit le tableau de variations suivant.

x	-1	0	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\parallel$	$+\infty$	0	$+\infty$

En particulier, la fonction φ est positive. De plus, la dérivée φ' s'annule seulement en 0 donc les variations de φ sont strictes, si bien que φ s'annule seulement en 0.

Exercice résolu n° 2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x - \sin(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, l'ensemble des points d'annulation de g' est

$$\{2n\pi ; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Cet ensemble ne contient pas d'intervalle non réduit à un point donc les variations de g sont strictes. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5 Théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection

Exercice résolu. Pour tout entier $n \geq 2$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ possède une unique solution positive et que celle-ci est dans $]0, 1[$.

Solution 1 : par le théorème de la bijection. Soit un entier $n \geq 2$.

La fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n x^k$ est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et strictement croissante, avec

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

donc, par le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

En particulier, puisque $1 \in [0, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 1$ possède exactement une solution dans $[0, +\infty[$.

Notons cette solution x_n . On remarque que $f_n(1) = n > 1$, si bien que $f_n(0) < f_n(x_n) < f_n(1)$.

La fonction f_n étant strictement croissante, on en déduit que $0 < x_n < 1$.

Remarque de méthode. J'ai vérifié *toutes* les hypothèses du théorème avant de l'appliquer.

Solution 2 : par le théorème des valeurs intermédiaires. Soit un entier $n \geq 2$.

La fonction f_n est continue sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $f_n(0) = 0 < 1$ et $f_n(1) = n > 1$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f_n(c) = 1$.

De plus, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle est injective. L'équation $f_n(x) = 1$ a donc une seule solution dans $[0, +\infty[$.

Remarque de méthode. La stricte croissance n'a aucun rapport avec le théorème des valeurs intermédiaires. Elle s'utilise séparément pour justifier l'unicité.

Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'*existence*. On ne peut en aucun cas l'invoquer pour justifier une unicité.

6 Fonction définie par une intégrale à bornes variables

Exercice résolu. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t^4}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée.

Solution. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 + t^4}}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_1^x \varphi(t) dt$ est une primitive de φ sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, la fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, avec $\Phi' = \varphi$.

Pour tout $x > 0$, on remarque que $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$. On en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, avec

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x^4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^4}}.$$

Quelques méthodes que je n'ai pas eu le temps de présenter mais qu'il faut connaître quand même.

- Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1.
- Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
- Calcul du rang, de l'image et du noyau d'une matrice.
- Calcul d'un projeté orthogonal et application à un problème de distance minimale.
- Tout le reste aussi, évidemment.