

Problème 1 — Polynômes de Legendre ()**

On munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) \, dt.$$

Pour tout entier n , on pose $A_n = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = \frac{1}{2^n \times n!} (A_n)^{(n)}$. Les polynômes P_n sont les *polynômes de Legendre*.

Question 1. Calculer P_0 , P_1 et P_2 .

Question 2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que P_n possède la même parité que n . Préciser son degré et son coefficient dominant.

Question 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer l'égalité

$$(A_n^{(n)}|Q) = (-1)^k (A_n^{(n-k)}|Q^{(k)}).$$

Question 4. En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Question 5. Exprimer $\|A_n^{(n)}\|^2$ en fonction d'une intégrale de Wallis puis en déduire la valeur de $\|P_n\|$.

Question 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant de l'égalité

$$((X^2 - 1) \times (X^2 - 1)^n)^{(n+2)} = \left(((X^2 - 1)^{n+1})' \right)^{(n+1)},$$

montrer l'égalité

$$(1 - X^2)P_n'' - 2XP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Question 7. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction

$$f_n : t \mapsto (P_n(t))^2 + \frac{1-t^2}{n(n+1)} (P_n'(t))^2.$$

En déduire que l'inégalité $|P_n(t)| \leq 1$ est valable pour tout t dans $[-1, 1]$.

Question 8. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

8.a. Montrer qu'il existe $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$ vérifiant l'égalité

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} P_k.$$

8.b. Montrer que le coefficient $a_{n,k}$ est nul pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ainsi que pour $k = n$.

8.c. Préciser les valeurs de $a_{n,n-1}$ et de $a_{n,n+1}$ puis en déduire une relation de récurrence entre les polynômes de Legendre.

8.d. Calculer ainsi les polynômes P_3 , P_4 et P_5 .

Question 9. (*)** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans l'intervalle $] -1, 1[$.

9.a. Première méthode : utiliser le théorème de Rolle à répétition.

9.b. Deuxième méthode : noter $a_1, \dots, a_s$ les racines de P_n de multiplicité impaire appartenant à $] -1, 1[$ et considérer le polynôme $Q = (X - a_1) \cdots (X - a_s)$.

Montrer que la fonction polynomiale $P_n Q$ est de signe constant sur $[-1, 1]$ et en déduire à l'aide de la question 3 que $s \geq n$.

Exercice 1. ()** Soit un entier $n \geq 2$. Soit P un polynôme complexe de degré n . On l'écrit sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

et on le factorise sous la forme $P = a_n \prod_{j=1}^n (X - z_j)$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on pose $S_\ell = \sum_{j=1}^n z_j^\ell$.

Question 10. Rappeler l'expression de S_1 en fonction des coefficients de P .

Question 11. Exprimer a_{n-2}/a_n en fonction des z_j .

Question 12. En déduire une expression de S_2 en fonction des coefficients de P .

Question 13. On suppose que $a_0 \neq 0$.

13.a. Montrer que la fonction $Q : z \mapsto z^n P(1/z)$ est polynomiale.

13.b. En déduire une expression de $\sum_{j=1}^n 1/z_j$ en fonction des coefficients de P .

Question 14. On suppose que $n = 3$. Trouver une expression de S_3 en fonction des coefficients de P .

Question 15. Trouver tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$a + b + c = 2, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 14, \quad a^3 + b^3 + c^3 = 20.$$

Exercice 2. ()** On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *additive*, ce qui signifie qu'elle vérifie l'identité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Question 16. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, prouver la relation $f(nx) = nf(x)$.

Question 17. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $q \in \mathbb{Q}$, prouver la relation $f(qx) = qf(x)$.

Question 18. Dans cette question, on suppose que f est continue en 0. Montrer alors que f est continue sur $\mathbb{R}$ puis prouver l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(1) \times x.$$

Question 19. Dans cette question, on suppose que f est monotone. Obtenir la même conclusion qu'à la question précédente.

Exercice 3. (*) On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une série de tirages sans remise.

Question 20. Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, \dots, 2n - 1$.

Question 21. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel on a tiré toutes les boules de numéros impairs.

Déterminer la loi et l'espérance de X .

Exercice 4. On peut compléter ceci en piochant parmi les exercices des deux premiers chapitres que nous n'aurons pas eu le temps de corriger en classe.