

Exercice 1. ()** Factoriser le polynôme $(X + i)^n - (X - i)^n$ puis exprimer la somme et le produit de ses racines.

Indication. On commencera par rappeler la factorisation de $X^n - a^n$.

Exercice 2. (*) Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 3. (*) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ une liste d'éléments de $\mathbb{C}$ distincts. Soit $(m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$.

On pose $P = \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P .

Exercice 4. (*) Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes distincts. On pose

$$P = \prod_{k=1}^n (X - a_k).$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Qu'obtient-on en réduisant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$ au même dénominateur ?

Exercice 5. ()** Soit un nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$. À l'aide de sommes de Riemann, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}.$$

Exercice 6. (*) Soit un entier $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{i2\pi/n}$.

a. Reconnaître le polynôme $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k)$.

b. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k}$.

Exercice 7. (*) On note $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $\llbracket 1, n \rrbracket$, montrer l'égalité $E_{i,j} \cdot E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.

Exercice 8. ()** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'égalité $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB)$ a lieu pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est une matrice scalaire (c'est-à-dire un multiple de la matrice I_n).

Exercice 9. (*) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Trouver un polynôme annulateur de A non nul de degré aussi petit que possible.

b. En déduire une expression des puissances de A .

c. Vérifier que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 10. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $(k+1)M^k = kM^{k+1}$.

Montrer que $M - I_n$ est inversible.

Exercice 11. ()** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $AB - BA = B^2$.

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que $AP(B) - P(B)A = B^2P'(B)$.

Exercice 12. (*) Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = \cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' - y \tan(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 14. ()** Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$.

$$\begin{cases} (1+t^2)x'(t) &= tx(t) + y(t) \\ (1+t^2)y'(t) &= -x(t) + ty(t). \end{cases}$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + iy$.

Exercice 15. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

Trouver une solution 2π -périodique ? Est-ce la seule ?

Exercice 16. ()** Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = x^2e^{-2x}$.

Exercice 17. (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n .

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n , notée x_n dans la suite.
3. Montrer que x_n est équivalent à $n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $y_n = \operatorname{Arctan}(x_n)$. En déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Montrer que $\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right)$ équivaut à $y_n - \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. En déduire un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

7. Obtenir un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 18. (*) On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(0) = -1/2$ et

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

a. Vérifier que la fonction f est continue en 0.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. ()** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction $x \mapsto (e^x - 1)^m$, montrer l'égalité

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Exercice 20. (*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$.

Vérifier que $u_n = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$. Que dire de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$?