

PC* 27 - DEVOIR N° 0/1

corrigé

1. Microscope

1. Le microscope met en jeu la suite de points conjugués suivante :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \quad .$$

Un objet A que l'on voit sans accommoder donne une image finale A_2 à l'infini, donc une image A_1 confondue avec F_2 : $A_1 = F_2$. Pour déterminer la position de cet objet A , utilisons la relation de conjugaison de Newton appliquée à L_1 :

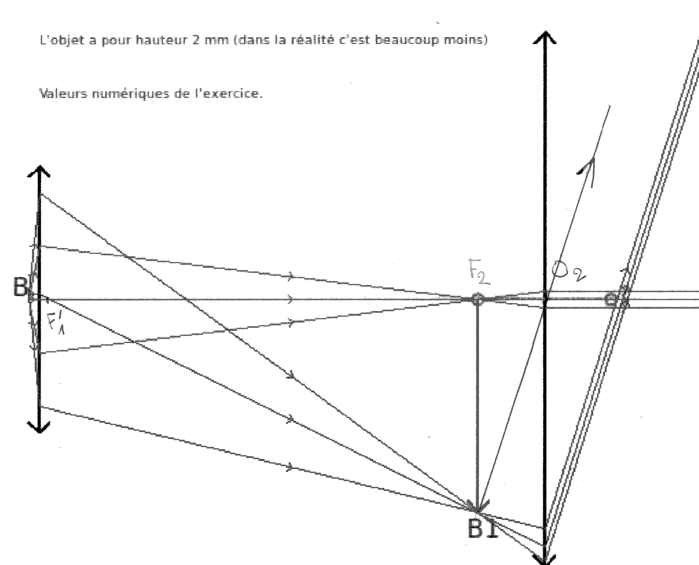
$$\overline{F_1 A} \cdot \overline{F_1' F_2} = -f_1'^2 \quad \overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -0,01 \text{ cm} \quad .$$

Cette réponse suffit, mais on peut la compléter en calculant $\overline{O_1 A} = \overline{O_1 F_1} + \overline{F_1 A} = -0,41 \text{ cm}$. Ce résultat peut aussi s'obtenir en utilisant la relation de Descartes pour L_1 et en utilisant $\overline{O_1 A_1} = f_1' + \Delta$. On obtient

$$\overline{O_1 A} = \frac{-f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta} = -0,41 \text{ cm} \quad .$$

2. Il n'est pas facile de réaliser un dessin à l'échelle car l'objet AB donne au travers de L_1 une image intermédiaire très agrandie. De plus, A est très voisin de F_1 et on ne peut guère les distinguer sur une figure. Comme on connaît la position de A_1 (confondu avec F_2), il serait maladroit et trop imprécis de partir de AB pour construire l'image $A_1 B_1$. Mieux vaut placer $A_1 = F_2$, puis placer B_1 arbitrairement dans le plan focal image, tracer le rayon passant par le centre O_1 de L_1 et définir ainsi B , presque dans le plan focal objet de L_1 . On trace ensuite d'autres rayons issus de B . Pour traiter le passage des rayons dans L_2 , on utilise le fait que B_1 est un foyer secondaire objet de L_2 : tous les rayons passant par B_1 émergent de L_2 parallèles à la droite $B_1 O_2$.

Il convient de tracer aussi des rayons issus de A . Comme il a pour image F_2 , tous les rayons qui en sont issus s'intersectent en F_2 après leur passage dans L_1 , puis émergent de L_2 parallèles à l'axe optique.

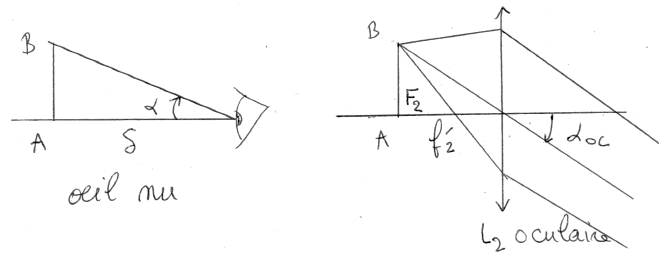


3. Par définition, le grandissement procuré par l'objectif est $\gamma_{\text{obj}} = \overline{A_1 B_1} / \overline{AB}$ et on peut le calculer par $\gamma_{\text{obj}} = \overline{O_1 A_1} / \overline{O_1 A}$. Cependant, la formule avec origine au foyer est ici plus commode :

$$\gamma_{\text{obj}} = \frac{\overline{F_1' A_1}}{\overline{F_1 O_1}} = -\frac{\overline{F_1' A_1}}{f_1'} = -\frac{\Delta}{f_1'} = -40 \quad .$$

4. Le grossissement est un rapport d'angles. Si on observe l'objet AB à l'œil nu en le plaçant au PP à la distance δ , on le voit sous un angle $\alpha \simeq \tan \alpha = AB / \delta$. Si on observe cet objet au travers de l'oculaire seul, en le plaçant au plan focal objet, il donne une image à l'infini et les rayons s'écartent de l'axe optique de l'angle $\alpha_{\text{oc}} \simeq \frac{AB}{f_2'}$. Le grossissement par l'oculaire est donc

$$G_{\text{oc}} = \frac{\alpha_{\text{oc}}}{\alpha} = \frac{\delta}{f_2'} = 10 \quad .$$



5. Dans le microscope, l'angle de sortie est

$$\alpha' = -\frac{\overline{A_1 B_1}}{f_2'} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \overline{AB}}{f_2'}$$

et le grossissement donné par

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \overline{AB}}{f_2' \overline{AB} / \delta} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \delta}{f_2'} \quad \boxed{G = -\gamma_{\text{obj}} G_{\text{oc}} = 400} .$$

6. On a toujours la chaîne de relations de conjugaison

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 .$$

Quand l'œil n'accomode pas, A se trouve dans la position déterminée dans la question 1 : $\overline{F_1 A} = -0,01 \text{ cm}$. Quand l'œil accomode au plus près, il forme sur la rétine l'image de l'objet situé au punctum proximum, à la distance δ à gauche de F_2' : $\overline{F_2' A_2} = -\delta$. Par la relation de Newton appliquée à L_2 , on en déduit

$$\overline{F_2 A_1} = -\frac{f_2'^2}{-\delta} = 0,25 \text{ cm} \quad \text{puis} \quad \overline{F_1 A_1} = \Delta + \overline{F_2 A_1} = 16,25 \text{ cm}$$

La relation de Newton appliquée à L_1 donne

$$\overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1 A_1}} = -0,00985 \text{ cm} .$$

Par rapport à la position de la question 1, le point A_1 s'est déplacé vers la droite de $15 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, c'est à dire $1,5 \mu\text{m}$. La latitude de mise au point est donc très faible : que l'œil accomode ou non, il voit observe presque au même endroit. L'observation se fait presque dans un plan, on voit de très fines tranches de l'objet.

On peut bien entendu utiliser la relation de conjugaison de Descartes et on obtient $\overline{O_1 A} = -0,40985 \text{ cm}$.

7. Soit O_1 le centre de l'objectif et O_1' son image par l'oculaire. On a $\overline{F_2 O_1} = -\Delta - f_1' = -16,4 \text{ cm}$. La relation de Newton appliquée à L_2 donne

$$\overline{F_2 O_1'} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2 O_1}} = 0,381 \text{ cm} .$$

On peut aussi utiliser la relation de Descartes et on obtient $\overline{O_2 O_1'} = 2,88 \text{ cm}$. Le cercle oculaire se situe légèrement en arrière de F_2' . Le grandissement entre les plans de front passant par O_1 et O_1' est

$$\gamma = -\frac{f_2'}{\overline{F_2 O_1}} = -0,152 .$$

Le diamètre du cercle oculaire est donc

$$D' = |\gamma| D = 1,07 \text{ mm} .$$

Tous les rayons lumineux qui entrent dans le microscope traversent l'objectif de diamètre D et, en sortant, tous traversent le cercle oculaire. En plaçant sa pupille dans le même plan que O_1' , l'observateur fera donc pénétrer dans son œil toute la lumière qui a traversé l'instrument et détectera ainsi une image bien lumineuse.

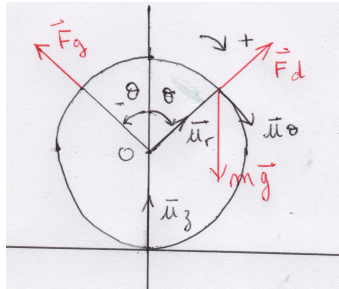
2. Glissade de deux billes sur un anneau

1. Comme la vitesse d'une bille est $v = a\dot{\theta}$, son énergie mécanique s'exprime par

$$E_m = mga \cos \theta + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \quad .$$

Chaque bille est soumise à son poids et à la réaction du support qui ne travaille pas en l'absence de frottement. Dans ces conditions, l'énergie mécanique se conserve et vaut $E_m(t=0) = mga$. On en déduit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g(1 - \cos \theta)}{a} \quad .$$



2. Considérons la bille située à droite, dont le mouvement est repéré par l'angle θ orienté dans le sens horaire (il est donc positif sur le dessin). Son accélération vaut $-a\ddot{\theta}^2 \vec{u}_r + a\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ et en projetant la seconde loi de Newton sur $\vec{u}_r$, on obtient

$$-ma\ddot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + F_d \quad .$$

En utilisant l'expression de $\dot{\theta}^2$ établie dans la question précédente, on en déduit

$$\vec{F}_d = mg(3 \cos \theta - 2) \vec{u}_r \quad .$$

La force $\vec{F}_g$ exercée sur la bille gauche possède la même norme mais est dirigée selon le vecteur $\vec{u}_r$ évalué à l'angle $-\theta$. Elle est donc symétrique de $\vec{F}_d$ par rapport à l'axe vertical.

3. Pour une bille glissant sur l'anneau, la perte de contact est définie par $F_d = 0$, ce qui donne $\theta = \theta_0$ avec

$$\theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48,2^\circ \quad .$$

4. Les composantes horizontales des forces $\vec{F}_d$ et $\vec{F}_g$ se compensent et leurs composantes selon $\vec{u}_z$, égales à $F_d \cos \theta$, s'additionnent. Sur l'ensemble des deux billes, l'anneau exerce donc la résultante $2F_d \cos \theta \vec{u}_z$. D'après le principe des actions réciproques, les deux billes exercent une force opposée sur l'anneau. De la part du support, l'anneau subit la réaction $\vec{R} = R \vec{u}_z$. Comme il est immobile, la somme des forces qu'il subit est nulle, ce qui s'exprime par

$$R - Mg - 2F_d \cos \theta = 0 \quad \text{d'où} \quad R = Mg + 2mg \cos \theta (3 \cos \theta - 2) \quad .$$

5. Le second terme de R devient négatif si $\theta > \theta_0$ et ce terme négatif est susceptible de dépasser Mg en valeur absolue. En étudiant la fonction $f : \theta \mapsto \cos \theta (3 \cos \theta - 2)$, on voit qu'elle présente un minimum égal à $-1/3$ pour $\theta = \theta_1 = \arccos(1/3) \simeq 70^\circ$. Pour $\theta = \theta_1$, $R = Mg - \frac{2}{3}mg$. L'anneau décolle si cette valeur de R est négative, c'est à dire si

$$m > \frac{3}{2}M \quad .$$

Si cette condition est vérifiée, R s'annule pour une valeur θ_{dec} de θ comprise entre θ_0 et θ_1 . On peut également répondre en résolvant l'équation $R = 0$. En posant $X = \cos \theta$ et $\alpha = M/m$, cela se ramène à l'équation du second degré $6X^2 - 4X + \alpha = 0$ qui possède des racines réelles si son discriminant est positif, c'est à dire si $\alpha < 2/3$: on retrouve la même condition. Lorsqu'il existe, l'angle de décollement est donné par

$$\cos \theta_{\text{dec}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}}{3} \quad .$$

3. Pile de dominos

La résolution de cet exercice passe par des schémas comportant la représentation des vecteurs forces avec leur point d'application. On les trouvera après la réponse à la dernière question.

1. Le domino D_1 est soumis à son poids et à la réaction $\vec{R}_1$. À l'équilibre, la somme de ces deux forces est nulle dont $\vec{R}_1 = -m\vec{g}$. À l'équilibre, le moment des forces en C_1 est nul, ce qui s'écrit $C\vec{G}_1 \wedge m\vec{g} + C\vec{K}_1 \wedge \vec{R}_1 = \vec{0}$. Comme $\vec{R}_1 = -m\vec{g}$, on en déduit $K_1\vec{G}_1 \wedge \vec{g} = \vec{0}$: les vecteurs $K_1\vec{G}_1$ et $\vec{g}$ sont donc colinéaires et K_1 est à la verticale de G_1 .

Ce résultat s'établit encore plus rapidement en exprimant le moment des forces en G_1 ou en C_1 puisque dans ce cas, le moment de l'une des deux forces est nul. L'idée est que si les deux forces ne possédaient pas la même droite d'action, elles formeraient un couple de moment non nul et dans ce cas, le domino ne serait pas à l'équilibre.

2. Le point d'application K_1 se trouve nécessairement à un endroit où D_2 touche D_1 , c'est à dire à gauche de C_1 . À la limite, $K_1 = C_1$ donc G_1 se trouve à la verticale de C_1 . Dans cette position $b_1 = a/2$.

3. Par le principe des actions réciproques, D_2 est soumis à $-\vec{R}_1 = m\vec{g}$ de la part de D_1 , s'appliquant en C_1 . Il est aussi soumis à son poids et à $\vec{R}_2$ s'appliquant en C_2 à la limite. Exprimons la somme des moments de ces forces en C_2 . Le moment de $\vec{R}_2$ est nul et, en remarquant que G_2 est décalé vers la gauche de C_2 d'une distance $(a/2 - b_2)$, il vient

$$\sum M_{C_2 z} = -b_2 mg + (a/2 - b_2)mg = mg(a/2 - 2b_2) \quad .$$

À l'équilibre cette somme est nulle d'où on déduit $b_2 = a/4$.

4. Le centre de masse du système formé par D_1 et D_2 a pour abscisse

$$x_G = \frac{x_{G_1} + x_{G_2}}{2} = \frac{b_2 + b_2 - a/2}{2} = b_2 - a/4 \quad .$$

En reprenant le raisonnement de la première question, le cas limite est atteint lorsque ce centre de masse se trouve à l'aplomb de C_2 , c'est à dire lorsque $x_G = 0$. On en déduit à nouveau $b_2 = a/4$.

5. Il s'agit de généraliser le résultat établi dans les cas de deux puis de trois dominos et on peut au choix appliquer l'une des deux méthodes vues dans les deux questions précédentes.

Première méthode : analyse des efforts sur D_{n-1}

Le domino D_{n-1} exerce sur D_{n-2} une réaction $\vec{R}_{n-2}$ qui compense le poids des dominos supérieurs $D_1, D_2, \dots, D_{n-2}$. On $\vec{R}_2 = -(n-2)m\vec{g}$ et, par le principe des actions réciproques, D_{n-1} est soumis à $-\vec{R}_{n-2} = (n-2)m\vec{g}$. Par hypothèse de récurrence, D_{n-2} est à la limite du basculement donc cette force s'applique en C_{n-2} . Le domino D_{n-1} est aussi soumis à son poids et à $\vec{R}_{n-1}$ de la part de D_n . À la limite, cette réaction s'applique en C_{n-1} et son moment en ce point est nul. La somme des moments en C_{n-1} des forces s'exerçant sur D_{n-1} est donc

$$\sum M_{C_{n-1} z} = mg(a/2 - b_{n-1}) - (n-2)mg b_{n-1} = mg[a/2 - (n-1)b_{n-1}] \quad .$$

À l'équilibre, cette somme est nulle donc

$$b_{n-1} = \frac{a}{2(n-1)} \quad .$$

Seconde méthode

Soit G le centre de masse de l'ensemble $\Sigma = \{D_1, D_2, \dots, D_{n-1}\}$ et G' le centre de masse de l'ensemble $\Sigma' = \{D_1, D_2, \dots, D_{n-2}\}$. À la limite de l'équilibre, G' est à l'aplomb de C_{n-2} et, par rapport à l'origine C_{n-1} , son abscisse est donc b_{n-1} . L'abscisse de G est donc

$$x_G = \frac{(n-2)m \times x_{G'} + m \times x_{D_{n-1}}}{(n-2)m + m} = \frac{(n-2)b_{n-1} + (b_{n-1} - a/2)}{n-1} = \frac{(n-1)b_{n-1} - a/2}{n-1} \quad .$$

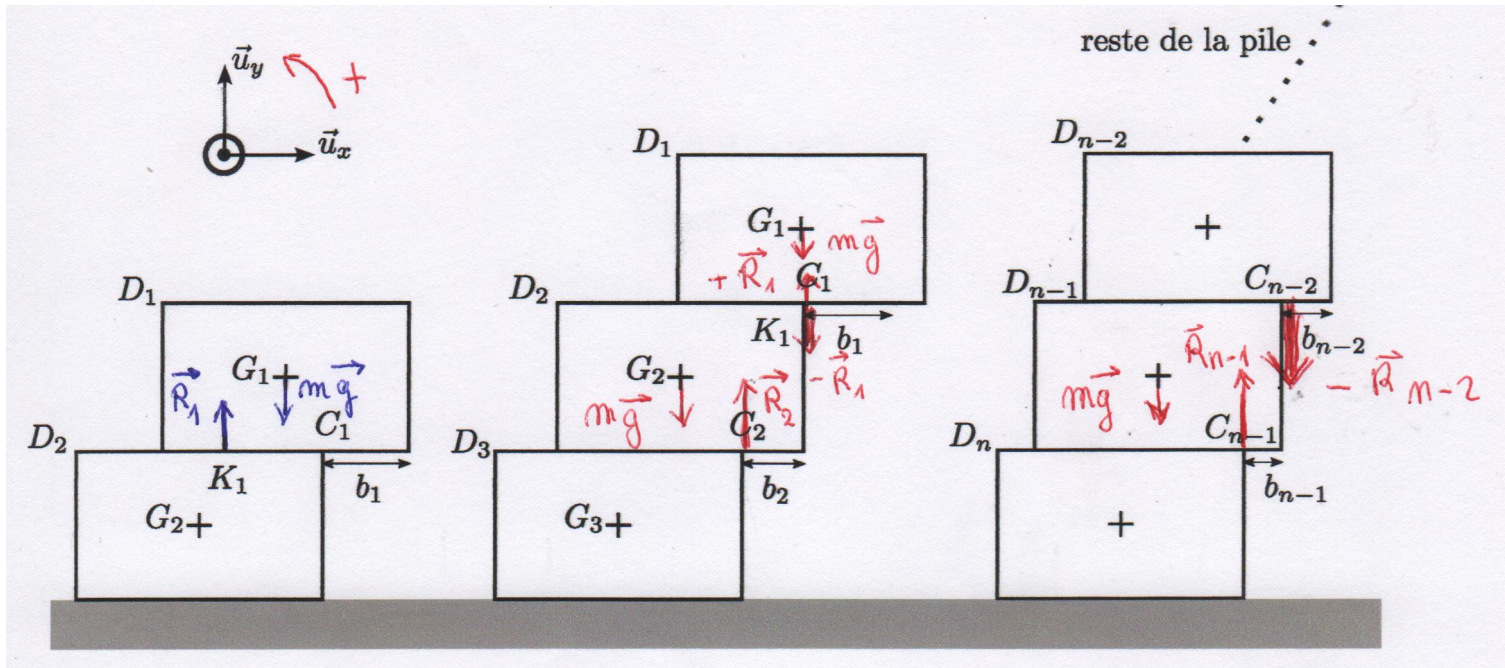
À la limite, G est à l'aplomb de C_{n-1} donc $x_G = 0$, ce qui donne

$$b_{n-1} = \frac{a}{2(n-1)} \quad .$$

6.

$$V_n = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) .$$

On voit apparaître la série harmonique, connue pour être divergente, ce qui signifie qu'on peut en théorie réaliser un surplomb total aussi grand qu'on le veut, à condition d'utiliser un nombre de dominos assez élevé. Cependant, comme b_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il devient de plus en plus difficile d'ajuster la position des dominos à mesure que b_n augmente. Voici un défi amusant à relever en utilisant des kaplas.



4. Voûte de dominos

La résolution de cet exercice passe par des schémas comportant la représentation des vecteurs forces avec leur point d'application. On les trouvera après la réponse à la dernière question.

1. Par le principe des actions réciproques, D_1 exerce la force $\vec{F}' = -\vec{F}$ sur D'_1 . Comme la situation est supposée parfaitement symétrique, $\vec{F}'$ symétrique de $\vec{F}$ par rapport à l'axe vertical. Ainsi, $-\vec{F}$ est symétrique de $\vec{F}$. Cela impose que $\vec{F}$ soit horizontale.

2. Le domino D_1 est soumis à son poids $m\vec{g}$, à $\vec{R}_1$ et à $\vec{F}$. À l'équilibre, la somme des forces est nulle ce qui donne en projection

$$\vec{T}_1 = F \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{N}_1 = mg \vec{u}_y .$$

La somme des moments de ces forces, calculés par exemple, en C_1 , est nulle. Cela donne

$$-dN_1 + (a/2 - b_1)mg + cF = 0 \quad \text{qui donne} \quad -d + (a/2 - b_1) + \frac{cF}{mg} = 0 \quad \text{ou encore} \quad b_1 = \frac{a}{2} - d + \frac{cF}{mg} .$$

3. La loi de Coulomb sur le non glissement s'écrit $|T_1| \leq \mu N_1$ c'est à dire $F \leq \mu mg$. La réaction $\vec{R}_1$ s'exerce dans la zone où D_1 et D_2 sont en contact, c'est à dire à gauche de C_1 , ce qui impose $d \geq 0$. Enfin, $c \leq h$ par contact de D_1 et D'_1 . En utilisant ces inégalité dans le résultat de la question précédente, on obtient

$$b_1 \leq b_{1\max} = \frac{a}{2} + \mu h .$$

4. Dans la question précédente, le cas limite est atteint lorsque $d = 0$, c'est à dire lorsque $\vec{R}_1$ s'exerce en C_1 . De même ici, $\vec{R}_1$ s'applique en C_1 et $\vec{R}_2$ en C_2 dans le cas limite. À la limite du glissement, $T_1 = \mu N_1 = \mu mg$ comme dans la question précédente. Dans cette configuration, calculons la somme des moments en C_2 des forces s'exerçant sur D_2 .

$$\sum M_{C2z} = (a/2 - b_2)mg - b_2N_1 + hT_1 = (a/2 - b_2)mg - b_2mg + h\mu mg .$$

À l'équilibre, cette somme est nulle donc

$$b_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \mu h \right) .$$

5. En raisonnant sur l'ensemble des dominos d'indice $1, 2, \dots, i$, et en écrivant que la somme des forces extérieures qu'il subit est nulle, on montre facilement que

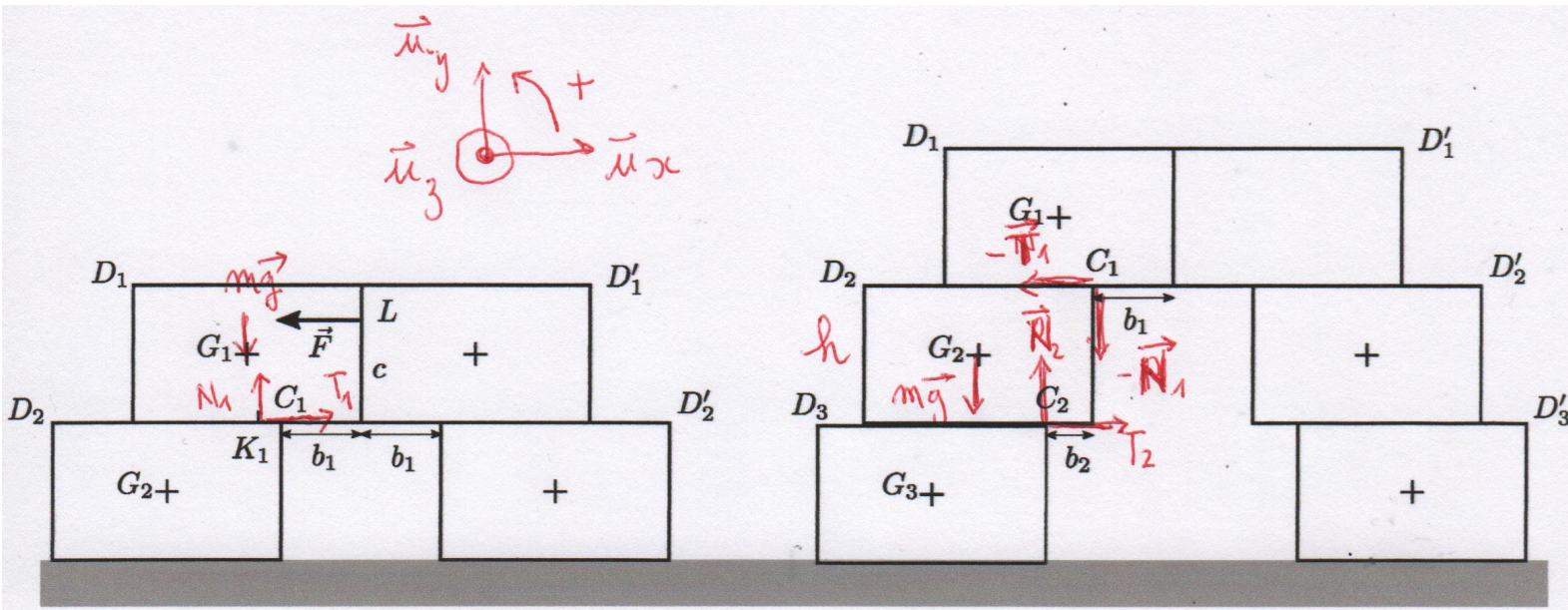
$$\forall i, T_i = F \quad N_i = i m g .$$

À nouveau, les réactions s'appliquent au coin supérieur droit des dominos dans le cas limite et la somme des moments en C_{n-1} des forces d'exerçant sur D_{n-1} s'écrit

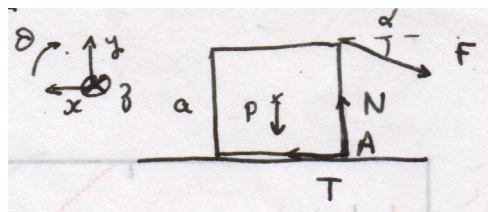
$$\sum M_{C_{n-1}z} = -b_{n-1}N_{n-2} + hT_{n-2} + (a/2 - b_{n-1})mg = -b_{n-1}(n-1)mg + hF + (a/2 - b_{n-1})mg .$$

À l'équilibre, cette somme est nulle et comme $F = \mu m g$ dans le cas limite, on en déduit

$$b_{n-1} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{a}{2} + \mu h \right) .$$



5. Basculement d'un cube



1. À la limite du basculement, la force qu'exerce la table sur le cube s'exerce en C et son moment en C est nul. Le moment du poids et celui de la force F ont pour somme

$$-mg \frac{a}{2} + aF \cos \alpha .$$

D'après le théorème du moment cinétique, le cube commence à basculer si cette somme est positive, c'est à dire si

$$F \geq \frac{mg}{2 \cos \alpha} .$$

2. Le membre de droite de l'inégalité est minimal si $\alpha = \alpha_{\min} = 0$. donc $F_{\min} = mg/2$.

3. Soit $\vec{R} = N\vec{u}_y + T\vec{u}_x$ la réaction exercée par la table sur le cube. Comme on se place à la limite de l'équilibre, on peut écrire que la somme des forces s'exerçant sur le cube est nulle, ce qui donne en projection

$$N = mg + F \sin \alpha \quad T = F \cos \alpha \quad .$$

Le mouvement sera exempt de glissement si $|T| \leq \mu N$. Pour $\alpha = \alpha_{\min}$ et $F = F_{\min}$, cela conduit à la condition $\mu \geq 1/2$.

4. En reprenant les expressions de N et T ci-dessus, la condition de non-glissement s'écrit

$$F \cos \alpha \leq \mu(mg + F \sin \alpha) \quad \text{d'où} \quad \tan \alpha \geq \frac{1 - 2\mu}{\mu} \quad .$$

D'après la question 1, la force minimale est atteinte lorsque α est le plus grand possible. Comme la fonction tangente croît sur $[0, \pi/2[$, il convient donc de choisir l'angle $\alpha'_{\min}$ dont la tangente est maximale, c'est à dire

$$\tan \alpha'_{\min} = \frac{1 - 2\mu}{\mu} \quad .$$

5. La force minimale cherchée s'obtient en remplaçant α par $\alpha'_{\min}$ dans le membre de droite de l'inégalité obtenue question 1. En utilisant la relation trigonométrique

$$\frac{1}{\cos \alpha'_{\min}} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha'_{\min}} \quad .$$

on obtient

$$F'_{\min} = \frac{mg}{2\mu} \sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1} \quad .$$

6. Réalisation approchée d'une fonction retard

1. La notion de fonction de transfert concerne des tensions sinusoïdales qu'on représente en notation complexe par $e(t) = E_0 e^{j\omega t}$ et $s(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$. La relation $s(t) = e(t - \tau)$ s'écrit

$$s(t) = E_0 e^{j(\omega(t-\tau))} = E_0 e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} = e(t) e^{-j\omega\tau} \quad .$$

La fonction de transfert est donc donnée par

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = e^{-j\omega\tau} \quad .$$

On voit que $|H(j\omega)| = 1$ donc $G_{dB} = 0$: la partie gain du diagramme de Bode est une droite horizontale. Comme $\varphi = \arg(H) = -\omega\tau$, la partie phase est une droite de pente $-\tau$ (si on porte en abscisse ω en échelle linéaire).

2. Le développement limité à l'ordre 2 de l'exponentielle permet d'écrire

$$H(j\omega) = 1 - j\omega\tau - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2 + o(\omega^2\tau^2) \quad .$$

L'approximation par le polynôme de degré deux est correcte si $\omega\tau \ll 1$.

3. Soit A le nœud où sont connectées les deux inductances et le condensateur. La relation du pont diviseur de tension permet d'écrire

$$s = \frac{R}{R + jL\omega} v_A \quad .$$

Pour éliminer v_A , utilisons la loi des nœuds en A en exprimant les trois intensités en fonction des potentiels.

$$\frac{e - v_A}{jL\omega} + \frac{s - v_A}{jL\omega} = v_A jC\omega \quad .$$

On en déduit

$$v_A = \frac{e + s}{2 - LC\omega^2}$$

puis on élimine v_A pour obtenir

$$H = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + 2jL\omega/R - LC\omega^2 - j\omega^3 L^2 C/R} \quad .$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 3.

4.

$$H = 1 - 2jL\omega/R + LC\omega^2 + (2jL\omega/R)^2 + o(\omega^2)$$

$$H \simeq 1 - 2jL\omega/R - \omega^2 \left(\frac{4L^2}{R^2} - LC \right)$$

5. Identifions ordre par ordre l'expression approximative ci-dessous à celle de la question 2. On obtient

$$\tau = \frac{2L}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\tau^2}{2} = \frac{4L^2}{R^2} - LC \quad .$$

En éliminant τ , on trouve

$$R = \sqrt{\frac{2L}{C}} \quad \text{puis} \quad \tau = \sqrt{2LC} \quad .$$

L'approximation d'ordre 2 de la question 2 est valide si $\omega\tau \ll 1$, c'est à dire si $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$. On remarque que

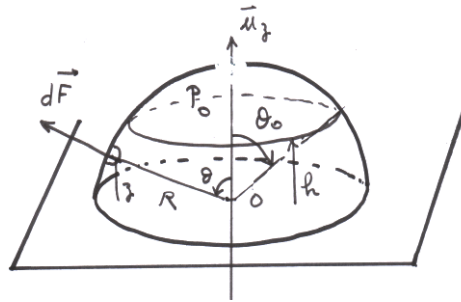
$$\frac{2\omega L}{R} = 2\omega L \sqrt{\frac{C}{2L}} = \sqrt{2}\omega\sqrt{LC} \quad .$$

Si $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$, alors $2\omega/R \ll 1$ et $LC\omega^2 \ll 1$ ce qui valide aussi le DL de la question 4.

7. Remplissage d'un hémisphère

1. Comme l'eau est introduite lentement, elle est presque à chaque instant à l'équilibre. On peut donc appliquer la loi de Pascal, dans laquelle l'altitude z est ici donnée par $z = R \cos \theta$. Comme l'intérieur de l'hémisphère est en contact avec l'atmosphère par le trou de remplissage, la pression à la surface de l'eau d'altitude h vaut P_0 de sorte que

$$P = P_0 + \rho g(h - z) = P_0 + \rho g(h - R \cos \theta).$$



2. En coordonnées sphériques, un élément de l'hémisphère d'aire d^2S subit de la part de l'eau et de l'air ambiant la force de pression $d\vec{F} = (P - P_0)d^2S\vec{u}_r$. À cause de l'invariance par rotation autour de la droite $(O, \vec{u}_z)$, la résultante de ces forces de pression est dirigée selon $\vec{u}_z$ et la projection de la force infinitésimale est

$$dF_z = (P - P_0)d^2S\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = \rho g(h - R \cos \theta) \cos \theta d^2S \quad .$$

Soit θ_0 l'angle qui repère la surface de l'eau à la hauteur h , défini par $h = R \cos \theta_0$. Comme $d^2S =$

$R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, la résultante cherchée est donnée par

$$\begin{aligned}
 F_z &= \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \rho g (h - R \cos \theta) \cos \theta \times R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= 2\pi R^2 \rho g \int_{\theta_0}^{\pi/2} h \cos \theta \sin \theta d\theta - R \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi R^2 \rho g \left\{ h \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \right]_0^{\pi/2} - R \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \right\} \quad \text{avec} \quad \cos \theta_0 = h/R \\
 &= 2\pi R^2 \rho g \left\{ \frac{h}{2} \frac{h^2}{R^2} - \frac{R}{3} \frac{h^3}{R^3} \right\} \\
 &= 2\pi R^2 \rho g \frac{h^3}{R^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
 F_z &= \frac{\pi \rho g h^3}{3} .
 \end{aligned}$$

Il est étonnant de constater que F_z ne dépend pas du rayon R de l'hémisphère, mais seulement de la hauteur h d'eau. On peut retrouver le résultat par un raisonnement sur le système Σ formé de toute la masse d'eau, mais le calcul ne s'en trouve pas simplifié.

3. À la limite du décollement, F_z a la même norme que le poids Mg de l'hémisphère. La relation $F_z = Mg$ conduit à

$$h = \left(\frac{3M}{\pi \rho} \right)^{1/3} .$$

8. Atmosphère isotherme

Il s'agit d'une question de cours portant sur l'équilibre de l'atmosphère isotherme. En combinant la loi de la statique des fluides et l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient

$$P = P_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT}{Mg} .$$

La pression vaut $P_0/2$ à l'altitude

$$z_{1/2} = H \ln 2 = 5,47 \text{ km} .$$

9. Efficacité d'une pompe à chaleur

Il s'agit d'une question de cours. Le fluide frigorigène mis en jeu dans la machine décrit des cycles ; dans un cycle il reçoit le travail W et le transfert thermique $Q_c < 0$ à la source chaude (l'habitation à chauffer). L'efficacité est définie par $e = -Q_c/W$. En appliquant le premier et le second principe de la thermodynamique sur un cycle au fluide frigorigène, on obtient

$$e \leq e_{\max} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 29 .$$

En pratique, l'efficacité des pompes à chaleur domestiques (souvent appelée coefficient de performance COP) est de l'ordre de 3 ou 4, bien inférieur à la valeur obtenue ici. Cela signifie que le fonctionnement fait subir au fluide frigorigène des transformations très irréversibles.

10. Cycle de Sabathe

1. Les étapes $1 \rightarrow 2$ et $4 \rightarrow 5$ sont adiabatiques réversibles, donc isentropiques. Dans la première, le gaz est comprimé donc il s'échauffe ; dans la seconde il se détend donc se refroidit.

Dans l'étape $2 \rightarrow 3$, la pression augmente et le volume est constant donc, d'après la loi des gaz parfaits, T augmente. Comme V est constant on peut écrire

$$S - nC_{vm} \ln T = S_2 - nC_{vm} \ln T_2 \quad \text{et} \quad T = T_2 e^{\frac{S-S_2}{nC_m}} .$$

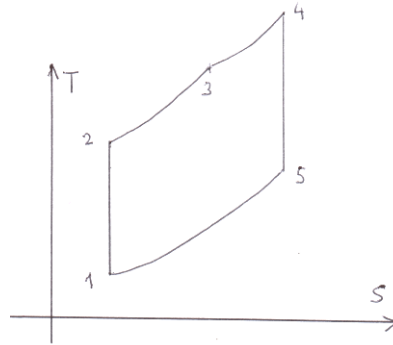
Dans le plan (S, T) , on obtient une portion d'exponentielle.

Dans l'étape $3 \rightarrow 4$, la température augmente à nouveau mais cette fois-ci, c'est P est fixée et en utilisant la seconde expression de S on obtient

$$T = T_3 e^{\frac{S-S_3}{nC_{pm}}} .$$

On obtient à nouveau une portion d'exponentielle, mais comme $C_{pm} > C_{vm}$, elle est moins pentue que la précédente.

L'étape $5 \rightarrow 1$ est analogue à l'étape $2 \rightarrow 3$, mais parcourue dans le sens inverse. Le cycle présente donc l'allure ci-dessous. Comme il convient pour un cycle moteur, il est décrit dans le sens horaire.



2. Pour un cycle moteur, le rendement est défini par $r = -W/Q_c$ où W est le travail reçu par le fluide sur un cycle et Q_c le transfert thermique reçu depuis la source chaude. D'après le premier principe appliqué sur un cycle, on a

$$W + Q_c + Q_f = 0 \quad \text{donc} \quad -W = Q_c + Q_f \quad \text{et} \quad r = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} .$$

Dans le moteur réel, une combustion a lieu au sein du fluide mais on modélise cet apport d'énergie par un échange avec une source chaude qui aurait lieu dans les étapes $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$: $Q_c = Q_{23} + Q_{34}$. L'échange avec la source froide correspond au refroidissement $5 \rightarrow 1$ donc $Q_f = Q_{51}$.

L'étape $2 \rightarrow 3$ est isochore donc $Q_{23} = nC_{vm}(T_3 - T_2)$. L'étape $3 \rightarrow 4$ est isobare donc $Q_{34} = nC_{pm}(T_4 - T_3)$. L'étape $5 \rightarrow 1$ est isochore donc $Q_{51} = nC_{vm}(T_1 - T_5)$. On en déduit

$$r = 1 + \frac{c_v(T_1 - T_5)}{c_v(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3)} = 1 + \frac{(T_1 - T_5)}{T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)} .$$

Il convient maintenant d'éliminer les températures.

- Comme l'étape $1 \rightarrow 2$ est adiabatique réversible, on peut utiliser la loi de Laplace sous la forme $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ pour obtenir $T_2 = T_1 a^{\gamma-1}$.
- Comme l'étape $2 \rightarrow 3$ est isochore, on peut écrire

$$\frac{nRT_2}{P_2} = \frac{nRT_3}{P_3} \quad \text{d'où} \quad T_3 = T_2 b = T_1 b a^{\gamma-1} .$$

- Comme l'étape $3 \rightarrow 4$ est isobare, on peut écrire

$$\frac{nRT_3}{V_3} = \frac{nRT_4}{V_4} \quad \text{d'où} \quad T_4 = T_3 s = T_1 s b a^{\gamma-1} .$$

- Enfin, pour l'étape $4 \rightarrow 5$, la loi de Laplace donne

$$T_5 = T_4 \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_4 \left(\frac{V_4 V_3}{V_3 V_1} \right)^{\gamma-1} = T_4 \left(\frac{s}{a} \right)^{\gamma-1} = T_1 b s^{\gamma} .$$

En reportant ces expressions des températures dans celle de r , on obtient

$$r = 1 + \frac{1 - b s^{\gamma}}{a^{\gamma-1} [b - 1 + \gamma b (s - 1)]}$$

3. Avec les valeurs proposées, on obtient $r = 0,56$. Pour un cycle de Carnot entre les températures $T_{\min} = T_1$ et $T_{\max} = T_4$, on aurait

$$r_C = 1 - \frac{T_1}{T_4} = 1 - \frac{1}{sba^{\gamma-1}} = 0,89 \quad .$$

Le rendement réel est inférieur, ce qui signifie que le cycle n'est pas réversible. Avec la modélisation adoptée, le gaz est brutalement mis au contact de la source de chaleur à la température T_4 dans les étapes $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, et il se produit un choc thermique. De même, un choc thermique se produit dans l'étape $5 \rightarrow 1$.

11. Transformations de l'eau

1. Il s'agit du phénomène de surfusion. Il le manifeste par exemple lors de pluies verglaçantes : l'eau liquide arrive au sol à une température négative et le congèle rapidement après l'impact. Un phénomène analogue se produit dans les bouillottes magiques impliquant la surfusion de l'acétate de sodium.

2. Comme l'eau et la glace coexistent à l'équilibre dans l'état final, la température à l'issue de la transformation est T_f . La transformation a lieu à pression atmosphérique et le récipient est calorifugé : elle est donc isenthalpique. Comme l'enthalpie est une fonction d'état, on peut exprimer sa variation en décomposant la transformation en deux étapes hypothétiques : d'abord, l'eau voit sa température évoluer de T_0 à T_f , puis 50% de l'eau se solidifie. On obtient ainsi

$$\Delta H = mc_\ell(T_f - T_0) - 0,5m\ell_f \quad .$$

On en déduit

$$T_0 = T_f - 0,5 \frac{\ell_f}{c_\ell} = -39,5^\circ\text{C} \quad .$$

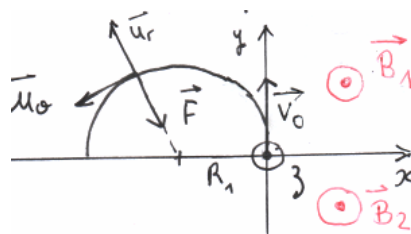
Pour une solidification totale et une température finale égale à T_f , il suffit de remplacer le coefficient 0,5 par 1 pour trouver $T_0 = -78,9^\circ\text{C}$. On devine que l'eau se solidifie entièrement si $T_0 < -78,9^\circ\text{C}$: dans ce cas, la température finale est inférieure à T_f et il faudrait ajouter au bilan enthalpique un nouveau terme correspondant au refroidissement de la glace. C'est l'objet de la question suivante.

3. Maintenant, $\Delta H = mc_\ell(T_f - T_0) - m\ell_f + mc_g(T_1 - T_f)$. Comme $\Delta H = 0$, on obtient

$$T_1 = T_f + \frac{\ell_f - c_\ell(T_f - T_0)}{c_g} = -42,1^\circ\text{C} \quad .$$

12. Dérive d'un électron dans un champ magnétique

1. L'électron est soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ orthogonale à la vitesse et qui ne travaille pas. D'après le théorème de la puissance cinétique, sa vitesse conserve donc une norme constante égale à v_0 . On sait qu'un électron en mouvement dans un champ magnétique uniforme et possédant une vitesse initiale orthogonale à ce champ présente un mouvement circulaire uniforme. On peut le démontrer en résolvant les équation cartésiennes du mouvement, en utilisant par exemple un détour par la notation complexe, mais l'énoncé ne le demande pas.



Ayant ainsi admis que le mouvement est circulaire, il est aisé d'exprimer son rayon. La vitesse est $\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta$ donc $\vec{F}_L = -ev_0 \vec{u}_\theta \wedge B_1 \vec{u}_z = -ev_0 B_1 \vec{u}_r$. En appliquant la seconde loi de Newton, on obtient par projection sur $\vec{u}_r$

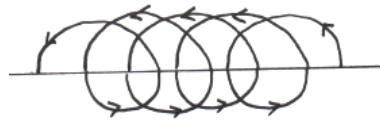
$$-m \frac{v_0^2}{R_1} = -ev_0 B_1 \quad \text{donc} \quad R_1 = \frac{mv_0}{eB_1} \quad .$$

2. L'électron atteint la zone où règne B_2 quand il a parcouru un demi-cercle de rayon R_1 ; le temps nécessaire pour cela est

$$t_1 = \pi R_1 / v_0 = \frac{m\pi}{eB_1} \quad .$$

Dans la région où règne B_2 , il décrit un nouveau demi-cercle de rayon $R_2 = mv_0 / (eB_2)$.

3. La durée du mouvement dans la seconde région est $t_2 = m\pi / (eB_2)$. À l'instant $t_1 + t_2$, l'électron regagne la première région et décrit à nouveau un demi-cercle de rayon R_1 . Comme $B_2 > B_1$, $R_2 < R_1$ et, après deux demi-tours, l'électron s'est décalé vers la gauche par rapport à sa position initiale. Ce phénomène se répète de sorte que peu à peu, il dérive vers les x négatifs. En deux demi-tours, c'est à dire pour une durée $t_1 + t_2$, le décalage est $2R_1 - 2R_2$.



On définit la vitesse de dérive v_d comme la vitesse moyenne après un nombre entiers de tours :

$$v_d = \frac{2R_1 - 2R_2}{t_1 + t_2} = \frac{2v_0 \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2}}{\pi \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}} = \frac{2v_0(B_2 - B_1)}{\pi(B_2 + B_1)} \quad .$$

13. Régime transitoire dans un système de circuits couplés

1. Dans chaque bobine, il faut tenir compte de la fém auto-induite $-Ldi/dt$ (ou $-Ldi'/dt$) mais aussi de la fém d'induction mutuelle $-Mdi'/dt$ (ou $-Mdi/dt$). Ce fém sont définies en convention récepteur, c'est à dire orientées dans le même sens que les intensités. Les lois des mailles s'écrivent

$$E = L \frac{di}{dt} + M \frac{di'}{dt} \quad L \frac{di'}{dt} + M \frac{di}{dt} + Ri' + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{avec} \quad i' = \frac{dq}{dt} \quad .$$

2. De la première équation, on tire

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{M}{L} \frac{di'}{dt} \quad .$$

En éliminant di/dt dans la seconde, puis en utilisant $i' = dq/dt$, on obtient

$$\ddot{q} \left(L - \frac{M^2}{L} \right) + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{ME}{L}$$

qui se réécrit

$$(1 - k^2)\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = -\frac{kE}{L}$$

ou encore, avec les notations de l'énoncé,

$$\boxed{(1 - k^2)\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = -\frac{kE}{L}} \quad .$$

3. Pour $Q = 1$ et $k = 1/2$, l'équation différentielle devient

$$\frac{3}{4}\ddot{q} + \omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = -\frac{E}{2L} \quad .$$

L'équation caractéristique a pour discriminant $\delta = -2\omega_0^2$ et ses racines s'écrivent

$$r_1 = \frac{2}{3}\omega_0(-1 + i\sqrt{2}) \quad r_2 = \frac{2}{3}\omega_0(-1 - i\sqrt{2}) \quad .$$

Une solution particulière de l'équation complète est $-E/(2L\omega_0^2) = -CE/2$ et la solution générale de l'équation est

$$q(t) = e^{-\frac{2}{3}\omega_0 t} (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) - \frac{CE}{2} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 \quad .$$

On détermine les constantes A et B avec les conditions initiales $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = i'(0) = 0$ qui s'écrivent

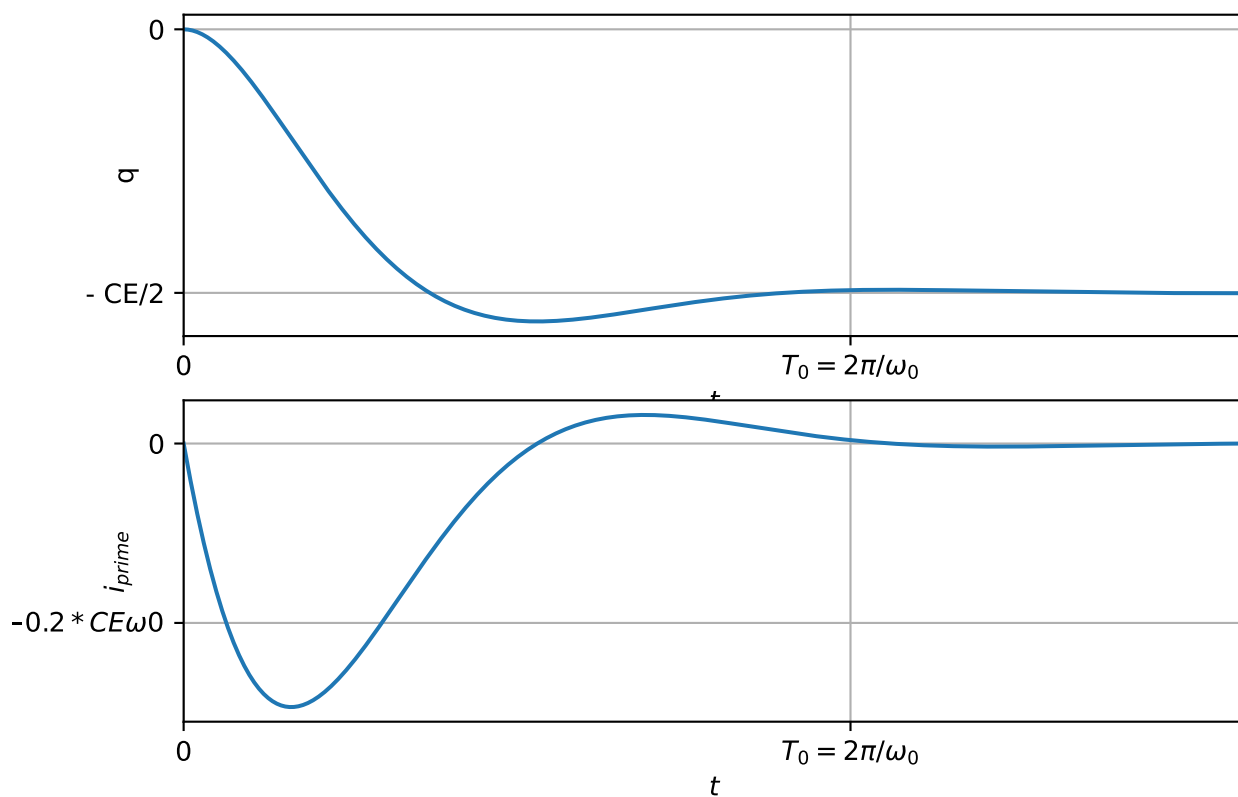
$$A - \frac{CE}{2} = 0 \quad -\frac{2}{3}\omega_0 A + B\omega_1 = 0 \quad .$$

On en déduit A et B puis l'expression finale

$$q = \frac{CE}{2} e^{-\frac{2}{3}\omega_0 t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega_1 t \right) - \frac{CE}{2} \quad .$$

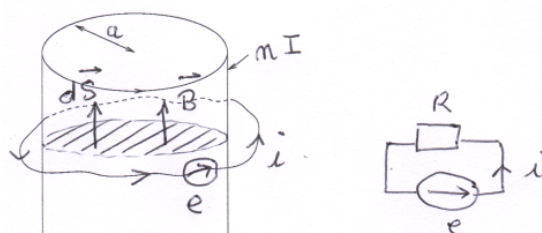
En dérivant, on trouve

$$i' = \frac{-\omega_0 CE}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2}{3}\omega_0 t} \sin \omega_1 t \quad .$$



14. Courant induit dans une spire entourant un solénoïde

1. Le solénoïde infini crée dans sa région interne un champ magnétique uniforme, colinéaire à son axe de révolution, orienté selon la règle de la main droite et de norme $\mu_0 n I$. À l'extérieur, le champ magnétique est nul.



2. Comme I dépend du temps, B dépend du temps et le flux magnétique au travers du circuit entourant le solénoïde varie. D'après la loi de Faraday, un courant induit y apparaît donc.

Lorsque le circuit présente une forme cabossée, comme c'est le cas sur la figure de l'énoncé, le calcul du flux peut sembler délicat. En réalité, on peut le calculer au travers de n'importe quelle surface s'appuyant sur le circuit et il suffit de la choisir de manière que son intersection avec le solénoïde soit un cercle. Comme le champ magnétique est nul hors du solénoïde, le flux se réduit à celui traversant le disque de rayon a . Avec l'orientation choisie sur la figure ci-contre, le vecteur surface est orienté vers le haut et le flux est $\Phi = \pi a^2 \mu_0 n I(t)$.

La fem induite est donnée par

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 \mu_0 n \omega I_0 \sin \omega t \quad .$$

La loi des mailles donne

$$i = \frac{e}{R} = \frac{\pi a^2 \mu_0 n \omega I_0 \sin \omega t}{R}$$

3. Dans ce cas, la surface limitée par le circuit induit est un cercle de rayon r et non plus de rayon a . Dans l'expression de Φ , il suffit de remplacer a par r et on obtient finalement

$$u = \frac{\pi r^2 \mu_0 n \omega I_0 \sin \omega t}{R} \quad .$$

4. Par définition du coefficient d'induction mutuelle, le flux envoyé par le solénoïde à travers l'autre circuit s'exprime par $\Phi = MI$. En identifiant cette expression celle écrite plus haut pour Φ , on obtient l'expression de M dans chacun des deux cas précédents :

$$M = \mu_0 n \pi a^2 \quad \text{et} \quad M = \mu_0 n \pi r^2 \quad .$$

5. Les coefficients de mutuelle induction sont symétriques, ce qui signifie que le même coefficient M permet d'exprimer le flux envoyé par le circuit à travers le solénoïde : $\Phi' = Mi(t)$. Par définition, ce flux correspond à l'orientation choisie plus haut pour I . En conservant cette même orientation, la fem induite et l'intensité induite dans le solénoïde sont donnée par

$$e' = -\frac{d\Phi'}{dt} = M \omega i_0 \sin \omega t \quad I' = \frac{e'}{R'} = \frac{M \omega i_0 \sin \omega t}{R'} \quad .$$

15. Rails de Laplace inclinés

Bien que l'énoncé ne le demande pas explicitement, il est bon de débiter par une analyse qualitative du phénomène, particulièrement lors d'un oral. Sous l'effet de son poids, la barre est entraînée vers le bas et la droite, ce qui fait augmenter la surface du circuit fermé formé de la barre, des rails et du fil représenté à gauche. Le flux magnétique au travers de ce circuit augmente et il est donc le siège d'un phénomène d'induction. Un courant induit y apparaît et circule en particulier dans la barre, qui est donc soumise à une force de Laplace. Selon la loi de Lenz, cette force tend à modérer le mouvement de la barre qui dévalera la pente moins vite qu'en l'absence de champ magnétique.

1. Avant toute chose, il convient d'orienter le circuit par une ou plusieurs flèches sur la figure et d'en déduire l'orientation de la surface pour le calcul du flux.

Notons ϕ_0 le flux traversant la partie du circuit situé aux abscisses négatives, comprenant notamment le fil dont on ignore la forme précise. Le reste du circuit a pour aire $S = \ell x$ et le flux s'exprime par

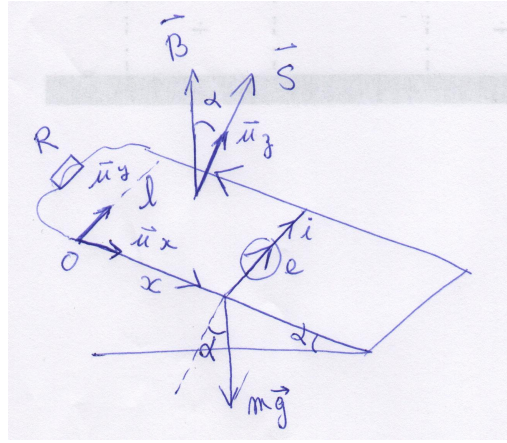
$$\Phi = \Phi_0 + B \ell x \cos \alpha \quad .$$

2. D'après la loi de Faraday, la fem induit est donnée par

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \ell \frac{dx}{dt} \cos \alpha = -B \ell v \cos \alpha \quad .$$

Il convient de représenter cet fém sur la figure (ou sur un dessin du circuit équivalent) en l'orientant dans le même que celui utilisé pour en déduire l'orientation de la surface. En orientant i dans le même sens, la loi des mailles (ou la loi de Pouillet) donne

$$i = \frac{e}{R} \quad \boxed{i = -\frac{B \ell v \sin \alpha}{R}} \quad .$$



3. La barre est soumise à son poids, à la réaction des rails (orthogonale à $\vec{u}_x$ en l'absence de frottement) et à la force de Laplace $\vec{F}_L$.

$$\vec{F}_L = i\ell\vec{u}_y \wedge B(\cos\alpha\vec{u}_z - \sin\alpha\vec{u}_x) = i\ell B(\cos\alpha\vec{u}_x + \sin\alpha\vec{u}_z)$$

En appliquant la seconde loi de Newton à la barre et en projetant sur $\vec{u}_x$, on obtient

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha + i\ell B\cos\alpha \quad .$$

En éliminant i il vient

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{B^2\ell^2\cos^2\alpha}{mR}v = g\sin\alpha} \quad .$$

4. Introduisons la constante de temps τ et la solution particulière v_∞ définies

$$\tau = \frac{mR}{B^2\ell^2\sin^2\alpha} \quad v_\infty = g\tau\sin\alpha.$$

Avec la condition initiale $v(0) = 0$, l'équation différentielle se résout en

$$\boxed{v(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau})} \quad .$$

Le graphe de $t \mapsto v(t)$ est aisé à tracer : la fonction croît de puis 0 et le graphe présente une asymptote horizontale d'ordonnée v_∞ , dont elle s'approche fortement après quelques fois τ .

5. En multipliant par Ri le résultat de la question 3, on obtient

$$Ri^2 = -B\ell v\cos\alpha i$$

qui signifie que la fém induite alimente l'effet Joule. En multipliant par v la loi de Newton, on obtient

$$\frac{d(mv^2/2)}{dt} = mgv\sin\alpha + iB\ell v\cos\alpha \quad .$$

On remarque que mv^2 représente l'énergie cinétique E_c et que $x\sin\alpha = -h$ où h est la hauteur de la barre (négative par rapport à l'origine). Ainsi, $mgv\sin\alpha = -d(mgh)/dt = -dE_p/dt$ où E_p est l'énergie potentielle de pesanteur. On a donc

$$\frac{dt}{dt}(E_c + E_p) = -Bilv\cos\alpha \quad .$$

Cette relation signifie que l'énergie mécanique varie à cause de la puissance de la force de Laplace.

On peut éliminer le terme $Bilv\cos\alpha$ pour obtenir

$$\frac{dt}{dt}(E_c + E_p) = -Ri^2 \quad .$$

L'énergie mécanique décroît à cause de l'effet Joule. Ce sont les effets magnétiques qui assurent le couplage entre l'aspect électrique et l'aspect mécanique en permettant une transduction électromécanique de l'énergie. Cependant, ils n'interviennent pas dans le bilan global.

16. Oscillations d'un cadre dans un champ magnétique

1. Quand on lâche le cadre, il est rappelé vers la haut par le ressort puis se met à osciller. Dans ce mouvement, la portion du cadre plongée dans le champ magnétique se modifie de sorte que le flux magnétique traversant le cadre varie. Selon la loi de Faraday, il apparaît donc une fem induite dans le cadre et, puisqu'il s'agit d'un circuit fermé, un courant induit le parcourt. Le fil constituant le cadre est alors soumis à des forces de Laplace qui influencent le mouvement. Selon la loi de Lenz, on s'attend à ce que ces forces entravent les oscillations. L'écart initial à l'équilibre est de longueur $a/2$ et, puisque cet écart est appelé à décroître, le segment inférieur du cadre ne sortira jamais de la région où règne le champ.

2. La portion de cadre qui plonge dans le champ magnétique a pour hauteur $a/2 + z$. Le flux magnétique orienté comme le montre la figure est donné par

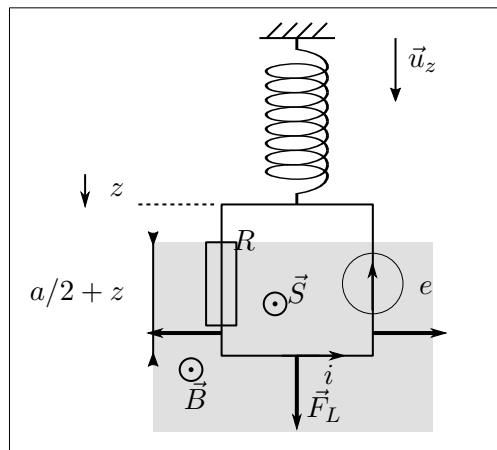
$$\Phi = Ba(a/2 + z) \quad .$$

3. La fem induite, orientée en accord avec la surface dans la question précédente, s'obtient par la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\dot{z}$$

et la loi des mailles $e = Ri$ donne l'intensité

$$i = -\frac{Ba\dot{z}}{R} \quad .$$



4. Le cadre est soumis à :

- son poids $\vec{P} = mg \vec{u}_z$;
- la force de rappel du ressort $\vec{F}_R = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_z = -k(\ell_{eq} + z - \ell_0) \vec{u}_z$.

À l'équilibre, avant qu'on déplace le cadre, z vaut 0 et la force de rappel exercée par le ressort compense le poids :

$$mg \vec{u}_z - k(\ell_{eq} - \ell_0) \vec{u}_z = \vec{0} \quad .$$

Cette remarque permet de simplifier deux termes dans la somme $\vec{P} + \vec{F}_R$ qui s'écrit

$$\vec{P} + \vec{F}_R = -kz \vec{u}_z \quad .$$

- des forces de Laplace.

Le côté supérieur n'est jamais dans le champ et ne subit aucune force de Laplace. Les forces de Laplace s'exerçant sur les côtés verticaux droit et gauche se compensent. La force s'exerçant sur le côté inférieur est donnée par

$$\vec{F}_L = i\vec{a} \wedge \vec{B} = iaB\vec{u}_z \quad .$$

Finalement, la somme des forces s'écrit

$$-kz \vec{u}_z + iaB\vec{u}_z \quad .$$

5. En appliquant la seconde loi de Newton au cadre, on obtient en projection sur $\vec{u}_z$

$$m\ddot{z} = -kz + iaB \quad .$$

L'intensité n'est pas connue, on l'élimine en utilisant le résultat de la question 3. On obtient

$$\ddot{z} + \frac{a^2 B^2}{mR} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0 \quad .$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux. On adopte les notations canoniques pour la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{a^2 B^2}{mR} \quad .$$

L'équation différentielle se résout selon la technique de l'équation caractéristique, ce qui amène à exprimer son discriminant

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

puis à distinguer trois types de mouvements possibles.

— Si $\Delta < 0$, c'est à dire si $Q > 1/2$, le régime est pseudo-périodique.

$$z = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$$

— Si $\Delta = 0$, c'est à dire si $Q = 1/2$, le régime est critique.

$$z(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

— Si $\Delta > 0$, c'est à dire si $Q < 1/2$, le régime est apériodique.

$$z = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t} \quad r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1/(4Q^2) - 1}$$

En principe, il faudrait encore déterminer les constantes A et B avec les conditions initiales

$$z(0) = a/2 \quad \dot{z}(0) = 0 \quad .$$

Il est plus intéressant de tracer schématiquement la courbe montrant z en fonction du temps dans les trois cas. Je vous laisse vous reporter au cours de PCSI pour cela. Dans tous les cas, le cadre revient asymptotiquement vers sa position d'équilibre.

Voyage vers Mars
Centrale PC 22

Q1. La force de gravitation entre deux astres de masses M_1 et M_2 séparés d'une distance d s'exprime par $F = GM_1M_2/d^2$. On en déduit que G a pour dimension $M^{-1}.L^3.T^{-2}$. Dans le système international d'unités, cette constante s'exprime en $\text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$.

Q2. Question de cours utilisant le théorème du moment cinétique et le caractère central de la force gravitationnelle.

Q3. Encore une question de cours. $C = r^2\dot{\theta} = L_O/m$ se nomme constante des aires.

Q4. Dans le cas d'une orbite circulaire, la seconde loi de Newton appliquée dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen au corps de masse m s'écrit en projection sur $\vec{u}_r$

$$-m\frac{V}{R} = \frac{GM_s m}{R^2} \quad \text{d'où} \quad V = \sqrt{\frac{GM_s}{R}} \quad V_T = 29,8 \text{ km.s}^{-1} \quad V_M = 24,2 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

Q5. On connaît l'expression $E_p = -GM_s m/R$. L'énergie mécanique est donnée par

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GM_s m}{R} = \frac{1}{2}\frac{GM_s m}{R} - \frac{GM_s m}{R} \quad \boxed{E_p = -\frac{1}{2}\frac{GM_s m}{R}} \quad .$$

Q6.

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM_s/R}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_s}}$$

Q7. La trajectoire est une ellipse dont le Soleil est un foyer. Elle est tangente aux deux orbites circulaires en deux points où la vitesse est perpendiculaire à $\vec{OM}$. Sur une trajectoire elliptique, cette configuration ne se rencontre qu'aux deux extrémités du grand axe, au périhélie et à l'aphélie. Comme le rayon de l'orbite de Mars est supérieur à ce celui de l'orbite de la Terre, le point de départ est le périhélie et le point d'arrivée est l'aphélie.

Q8. Cette question se résout en utilisant la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la connaissance du périhélie et de l'aphélie détermine la longueur du grand axe qui, pour une orbite elliptique, est directement liée à l'énergie mécanique, elle-même liée à la vitesse initiale.

La longueur du grand axe est $2a = a_T + a_M$ et l'énergie mécanique donnée par

$$E_m = -\frac{GM_s m}{2a} = -\frac{GM_s m}{a_T + a_M} \quad .$$

En exprimant cette énergie à l'instant initial, on obtient

$$-\frac{GM_s m}{a_T + a_M} = \frac{1}{2}mV_T^2 - \frac{GM_s m}{a_T} \quad .$$

On en déduit

$$V'_T = \sqrt{\frac{2GM_s a_M}{a_T(a_T + a_M)}} = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} \quad \Delta V_T = V_T \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1 \right) = 2,93 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

Q9. Soit T la période de rotation sur l'ellipse; elle est donnée par la troisième loi de Kepler vue dans la question 4, en remplaçant R par $a = (a_T + a_M)/2$. Ici, le vaisseau parcourt seulement une demi-ellipse donc

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2}}{\sqrt{GM_s}} = 22,34.10^6 \text{ s} = 258,7 \text{ jours} \quad .$$

Q10. Pendant que le vaisseau parcourt la demi-ellipse, Mars se déplace sur son orbite et, pour qu'elle se trouve à l'aphélie A lorsque le vaisseau atteint ce point, elle doit se trouver largement « en arrière » de ce point à l'instant $t = 0$ où le vaisseau est parti de P . Plus précisément, la vitesse angulaire de Mars sur son orbite est

$$\omega_M = \frac{v_M}{a_M} = \sqrt{\frac{GM_s}{a_M^3}} \quad .$$

Pendant la durée Δt du vol, elle parcourt l'angle $\omega_M \Delta t$ donc $\theta_M(\Delta t) = \theta_M(0) + \omega_M \Delta t$. La condition $\theta_M(\Delta t) = \pi$ équivaut à $\theta_M(0) = \pi - \omega_M \Delta t$ ce qui donne après élimination de ω_M et Δt :

$$\alpha_0 = \theta_M(0) = \pi \left[1 - \left(\frac{a_T + a_M}{2a_M} \right)^{3/2} \right] \quad \alpha_0 = 0,245\pi = 44^\circ \simeq \pi/4 \quad .$$

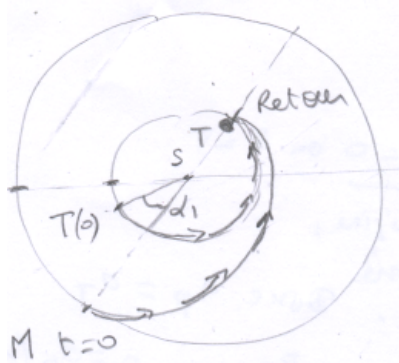
Q11. Dans le cas envisagé, le vaisseau parcourt la seconde moitié de l'ellipse et revient sur l'orbite terrestre après une durée $2\Delta t$. Pendant ce temps, la Terre a tourné sur son orbite à la vitesse angulaire $\omega_T = \sqrt{GM_s/a_T^3}$ et atteint la position angulaire

$$\begin{aligned} \theta_T(2\Delta t) &= \omega_T T = \sqrt{GM_s/a_T^3} \times 2\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM_s}} \\ \theta_T(2\Delta t) &= 2\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2a_T} \right)^{3/2} = 2\pi \times 1,41 \quad . \end{aligned}$$

La terre a donc parcouru plus d'un tour sur son orbite, presque un tour et demi. Elle ne se trouve plus du tout au même endroit que lors du lancement et le vaisseau, en revenant près de l'orbite terrestre au point de lancement, ne retrouvera pas la Terre.

Q12. Pendant ce voyage retour, le vaisseau parcourt une demi-ellipse et son angle polaire augmente de π pendant une durée Δt égale à celle du voyage aller. Pendant ce temps, la Terre tourne plus rapidement sur son orbite circulaire à la vitesse angulaire $\omega_T \Delta t$. Pour que les deux objets coïncident à la fin du trajet retour, il convient donc que la Terre présente au départ un retard de phase

$$\alpha_1 = \omega_T \Delta t - \pi = \sqrt{\frac{GM_s}{a_T^3}} \pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM_s}} - \pi \quad \boxed{\alpha_1 = \pi \left[\left(\frac{a_T + a_M}{2a_T} \right)^{3/2} - 1 \right] = 0,414\pi = 74,6^\circ} \quad .$$



Q13. Cette question est assez difficile alors que la formulation de l'énoncé laisse penser que la réponse se déduit facilement de la précédente !

La Terre tourne à la vitesse angulaire ω_T et Mars à la vitesse angulaire ω_M plus faible. Ainsi, $\theta_T - \theta_M$ croît un fil du temps à la vitesse angulaire relative $\omega_T - \omega_M$. Lorsque le vaisseau atteint Mars en A, la Terre se trouve à l'angle $\omega_T \Delta t$ et possède donc une avance de phase $\omega_T \Delta t - \pi = \alpha_1$ (j'ai placé cette position de la Terre sur la figure). Au contraire, lorsque le vaisseau repart de Mars, la Terre doit se trouver en retard de l'angle α_1 . La Terre doit donc acquérir un retard de phase de $-2\alpha_1$. Comme la Terre tourne plus vite que Mars, ce retard s'entend modulo 2π . En tournant plus vite que Mars, la Terre tend à la rattraper par l'arrière. Autrement dit, $\theta_T - \theta_M$ augmente de $2\pi - 2\alpha_1$ entre l'arrivée sur Mars et le début du voyage retour. La durée δt de séjour sur Mars est donc telle que

$$(\omega_T - \omega_M)\delta t = 2\pi - 2\alpha_1 \quad \text{d'où} \quad \delta t = \frac{2(\pi - \alpha_1)}{\sqrt{\frac{GM_s}{a_T^3}} - \sqrt{\frac{GM_s}{a_M^3}}} \quad \delta t = 39,7 \cdot 10^6 \text{ s} = 459 \text{ j} \quad .$$

Au lancement depuis la Terre, Mars doit être en avance de α_0 , et à nouveau cette avance est définie modulo 2π et la configuration souhaitée se reproduit périodiquement avec une période qui définit l'intervalle entre deux lancements possibles :

$$T_{\text{lance}} = \frac{2\pi}{\omega_T - \omega_M} = 67,8 \cdot 10^6 \text{ s} = 784 \text{ j} \quad .$$

Q14. Voir le document réponse.

Q15. À $t = 0$, la vitesse du vaisseau est tangent à l'orbite terrestre, donc perpendiculaire au vecteur position. Sur une trajectoire elliptique, cela ne se rencontre qu'au périhélie et à l'aphélie, donc le point de départ est soit l'un soit l'autre de ces deux points. Or, dans les premiers instants, la distance r croît donc la position initiale ne constitue par un maximum de distance. Ainsi, le début de la trajectoire correspond à son périhélie et $r_P = a_T$.

On peut fournir une réponse plus formelle. À partir de l'équation de la conique fournie, on calcule

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad .$$

Le périhélie et l'aphélie correspondent à des extremums de r et à l'annulation de cette dérivée. Elle se produit lorsque $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, avec des valeurs de r

$$r_{\min} = r_p = r(0) = \frac{p}{1+e} \quad r_{\max} = r_a = r(\pi) = \frac{p}{1-e} \quad .$$

Au lancement, $\theta = 0$ donc on se trouve au périhélie, et on sait que $r(0) = r_T$. Donc $r_P = a_T$.

Q16. On vient de montrer que $a_T = p/(1+e)$. À l'arrivée sur Mars, $r = a_M$ et $\theta = 3\pi/4$ donc

$$a_M = \frac{p}{1 - \frac{e}{\sqrt{2}}} \quad p = a_M \left(1 - \frac{e}{\sqrt{2}}\right) \quad .$$

En éliminant p entre ces deux relations, on obtient facilement

$$e = \frac{a_M - a_T}{a_T + \frac{a_M}{\sqrt{2}}} \quad e = 0,251 \quad .$$

Ce n'est pas demandé, mais pour faciliter le tracé de la trajectoire on peut calculer

$$r_{\max} = \frac{a_M(1 - e/\sqrt{2})}{1 - e} = 1,09 a_M \quad .$$

Q17. Le grand axe de la trajectoire elliptique est

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} = \frac{2a_T(1+e)}{1-e^2} = \frac{a_T}{1-e} \quad .$$

En reprenant l'expression de l'énergie mécanique vue à la question 5, dans laquelle on remplace $2R$ par $2a$, on obtient

$$E_m = -\frac{GM_s m(1-e)}{2a_T} = -\frac{1}{2}mV_T^2(1-e) \quad .$$

Q18. On évalue E_m comme la somme $E_c + E_p$ à $t = 0$.

$$E_m = \frac{1}{2}mV_T'^2 - \frac{GM_s m}{a_T} = \frac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2 \quad .$$

En l'identifiant à l'expression obtenue dans la question précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2 = -\frac{1}{2}mV_T^2(1-e) \quad \text{d'où on tire} \quad \boxed{V_T'' = \sqrt{1+e} V_T} \quad .$$

Q19.

$$\Delta V_T' = (\sqrt{1+e} - 1) V_T = 0,118 V_T = 3,47 \text{ km.s}^{-1}$$

Q20. C est une constante du mouvement ; on la trouve grâce aux conditions initiales

$$C = r \times r\dot{\theta} = a_T V_T'' \quad .$$

Q21. Comme $C = r^2 d\theta/dt$, le temps mis pour balayer l'angle $d\theta$ est $dt = r^2 d\theta/C$. Avec l'équation de la conique,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a_T(1+e)}{1 + e \cos \theta} \quad \text{donc} \quad dt = \frac{a_T^2(1+e)^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{a_T V_T''} = \frac{a_T(1+e)^2 d\theta}{a_T V_T''(1 + e \cos \theta)^2} \quad .$$

On obtient le temps de parcours par intégration

$$\Delta t' = \int_0^{\Delta t'} dt = \frac{a_T(1+e)^2}{V_T''} \int_0^{3\pi/4} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2,15 a_T(1+e)^2}{V_T''} \quad \Delta t' = 15,1 \cdot 10^4 \text{ s} = 175 \text{ j} \quad .$$

Questions 7 et 10

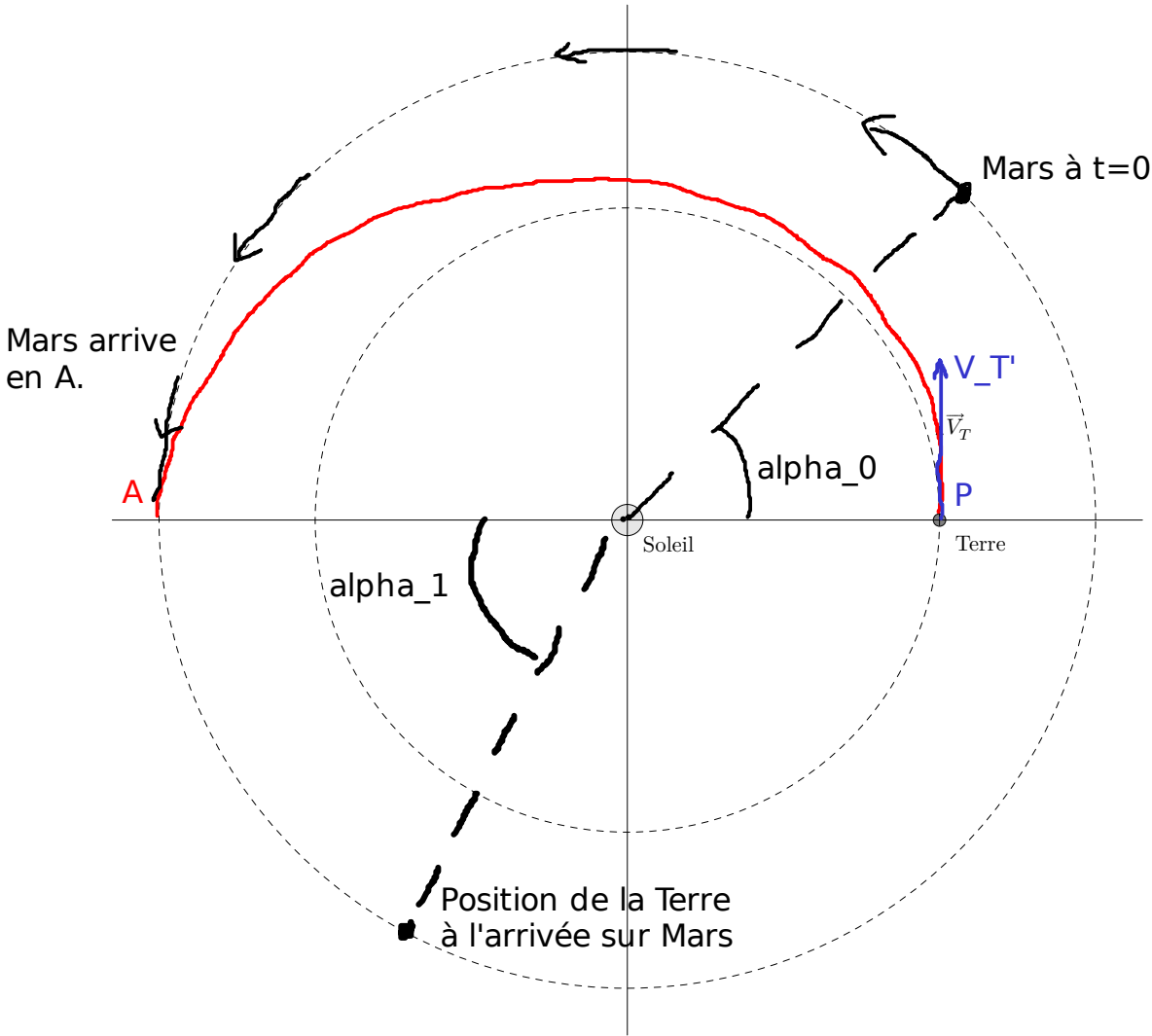


Figure A

Questions 14 et 16

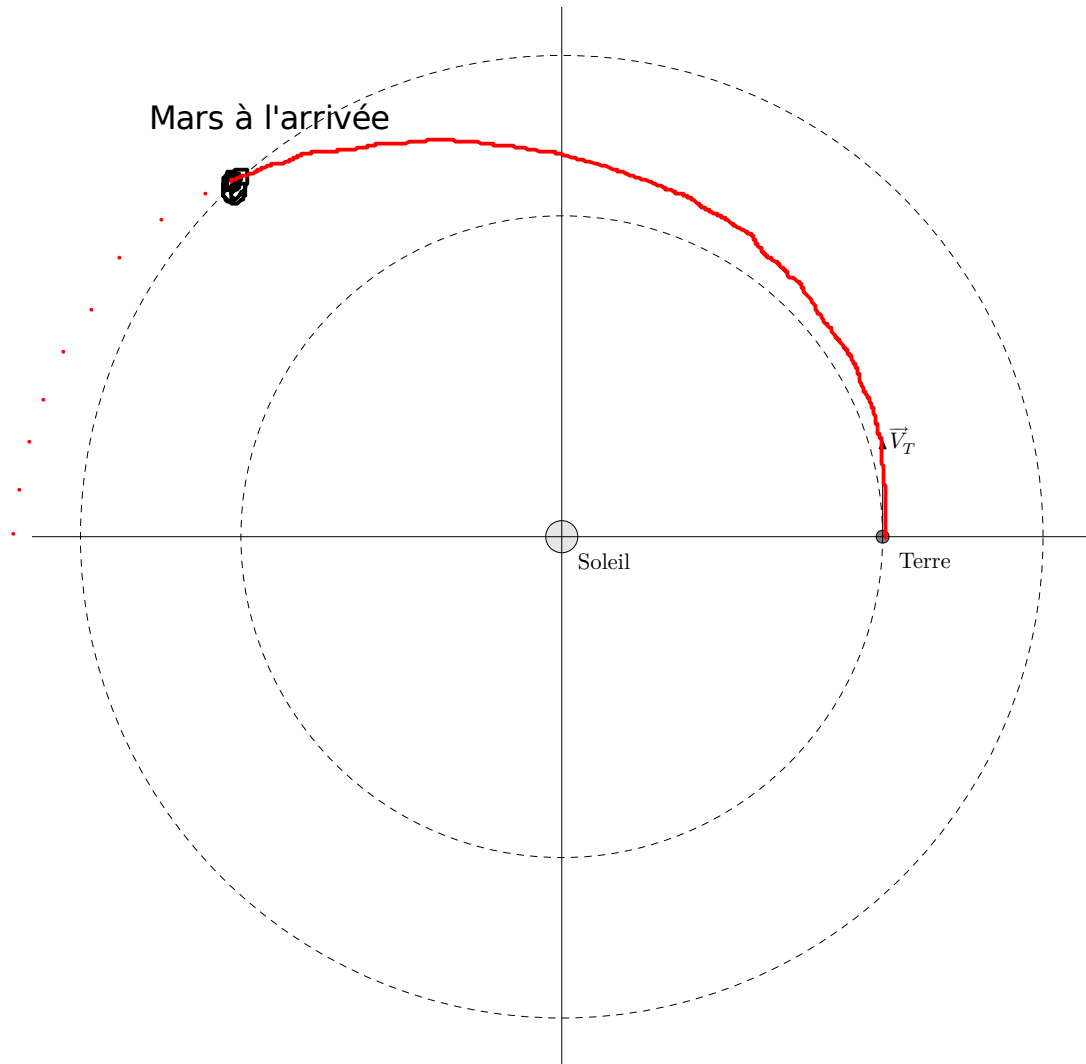


Figure B