Séries à termes positifs

Exercice 1. (*)

$$a_n = \frac{3^n}{n}, \quad b_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad c_n = \frac{\sin^2(n)}{n^{3/2}}, \quad d_n = \frac{n}{(n+1)!}, \quad e_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^n \, \mathrm{d}t$$

$$f_n = \frac{n}{3+\cos(n)}, \quad g_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n, \quad h_n = \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}}, \quad i_n = 3^{1/n} - 2^{1/n}, \quad j_n = 2^{-(\ln(n))^{1/3}},$$

$$k_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}, \quad \ell_n = \mathrm{e}^{1/n} - \cos(1/n) - \sin(1/n), \quad m_n = \frac{x^n}{4^n}\binom{2n}{n}, \quad p_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}, \quad q_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Série télescopique

Exercice 2. (**) Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On fait l'hypothèse

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite de terme général $\ln(n^s\, u_n)$ possède une limite finie. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3. (**) On prend a et b réels et strictement positifs. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels strictement positifs qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

a. Déduire de l'exercice précédent un équivalent de u_n.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le couple (a, b) pour que la série de terme général u_n soit convergente.

On suppose dans la suite que cette condition est satisfaite.

c. Calculer les sommes suivantes

$$\mathrm{S}_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)u_{n+1} - nu_n\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S}_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n\right).$$

d. En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4. (**) On définit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant x_0 strictement positif et en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n + x_n^2.$$

a. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la suite de terme général $u_n = 2^{-n}\ln(x_n)$ est convergente (utiliser la série des différences).

c. Montrer que x_n admet un équivalent de la forme $\exp(2^n\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

Séries de référence

Exercice 5. (*) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, déterminer si les sommes suivantes existent et calculer leurs valeurs éventuelles.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^3\frac{z^n}{n!}.$$

Exercice 6. (*) Pour tout $\alpha > 1$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha}$ en fonction de $\zeta(\alpha)$.

Convergence absolue

Exercice 7. (**) On fixe (a, b) dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

a. Obtenir un développement asymptotique de u_n avec la précision $\mathcal{O}(1/n^2)$.

b. En déduire qu'il existe un unique choix de (a, b) pour lequel la série de terme général u_n est convergente et préciser ce choix.

c. Pour ce choix particulier de (a, b), calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer quele nombre $u_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier.

En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge absolument.

Séries alternées

Exercice 9. (**) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 10. (*) Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 11. (**) Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 12. (***) Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

Exercices variés

Exercice 13. Transformation d'Abel (**) On considère une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, de limite nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$. On suppose que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité $\sum_{k=1}^{n} u_k\, z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1})\mathrm{S}_k - u_1\mathrm{S}_0 + u_{n+1}\mathrm{S}_n$.

b. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k\, z_k$ est convergente.

c. Pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ et tout $\alpha > 0$, montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k^\alpha}$ converge.

Exercice 14. (**) On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a. Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{(\mathrm{S}_n)^2}$ converge. Pour cela, on observera la minoration $(\mathrm{S}_n)^2 \geqslant \mathrm{S}_n\mathrm{S}_{n-1}$.

b. Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ a la même nature que la série $\sum u_n$.

Pour le cas de divergence, on séparera le cas où u_n/S_n tend vers 0 et on exploitera l'équivalent $-\ln(1-t) \sim t$ lorsque t tend vers 0.
