

PC* 27 - DEVOIR N° 0/1

corrigé

1. Microscope

1. Le microscope met en jeu la suite de points conjugués suivante :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \quad .$$

Un objet A que l'on voit sans accommoder donne une image finale A_2 à l'infini, donc une image A_1 confondue avec F_2 : $A_1 = F_2$. Pour déterminer la position de cet objet A , utilisons la relation de conjugaison de Newton appliquée à L_1 :

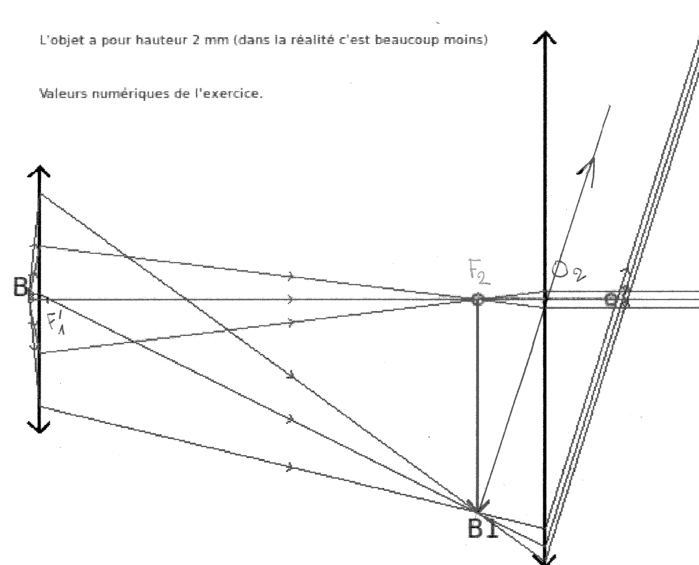
$$\overline{F_1 A} \cdot \overline{F_1' F_2} = -f_1'^2 \quad \overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -0,01 \text{ cm} \quad .$$

Cette réponse suffit, mais on peut la compléter en calculant $\overline{O_1 A} = \overline{O_1 F_1} + \overline{F_1 A} = -0,41 \text{ cm}$. Ce résultat peut aussi s'obtenir en utilisant la relation de Descartes pour L_1 et en utilisant $\overline{O_1 A_1} = f_1' + \Delta$. On obtient

$$\overline{O_1 A} = \frac{-f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta} = -0,41 \text{ cm} \quad .$$

2. Il n'est pas facile de réaliser un dessin à l'échelle car l'objet AB donne au travers de L_1 une image intermédiaire très agrandie. De plus, A est très voisin de F_1 et on ne peut guère les distinguer sur une figure. Comme on connaît la position de A_1 (confondu avec F_2), il serait maladroit et trop imprécis de partir de AB pour construire l'image $A_1 B_1$. Mieux vaut placer $A_1 = F_2$, puis placer B_1 arbitrairement dans le plan focal image, tracer le rayon passant par le centre O_1 de L_1 et définir ainsi B , presque dans le plan focal objet de L_1 . On trace ensuite d'autres rayons issus de B . Pour traiter le passage des rayons dans L_2 , on utilise le fait que B_1 est un foyer secondaire objet de L_2 : tous les rayons passant par B_1 émergent de L_2 parallèles à la droite $B_1 O_2$.

Il convient de tracer aussi des rayons issus de A . Comme il a pour image F_2 , tous les rayons qui en sont issus s'intersectent en F_2 après leur passage dans L_1 , puis émergent de L_2 parallèles à l'axe optique.

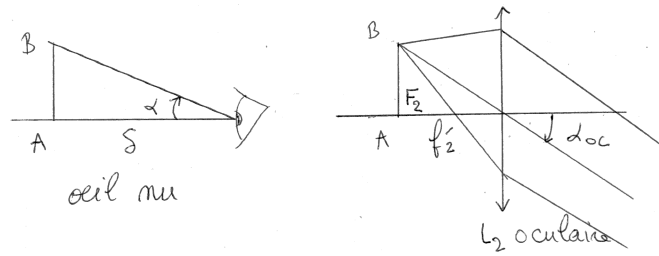


3. Par définition, le grandissement procuré par l'objectif est $\gamma_{\text{obj}} = \overline{A_1 B_1} / \overline{AB}$ et on peut le calculer par $\gamma_{\text{obj}} = \overline{O_1 A_1} / \overline{O_1 A}$. Cependant, la formule avec origine au foyer est ici plus commode :

$$\gamma_{\text{obj}} = \frac{\overline{F_1' A_1}}{\overline{F_1 O_1}} = -\frac{\overline{F_1' A_1}}{f_1'} = -\frac{\Delta}{f_1'} = -40 \quad .$$

4. Le grossissement est un rapport d'angles. Si on observe l'objet AB à l'œil nu en le plaçant au PP à la distance δ , on le voit sous un angle $\alpha \simeq \tan \alpha = AB / \delta$. Si on observe cet objet au travers de l'oculaire seul, en le plaçant au plan focal objet, il donne une image à l'infini et les rayons s'écartent de l'axe optique de l'angle $\alpha_{\text{oc}} \simeq \frac{AB}{f_2'}$. Le grossissement par l'oculaire est donc

$$G_{\text{oc}} = \frac{\alpha_{\text{oc}}}{\alpha} = \frac{\delta}{f_2'} = 10 \quad .$$



5. Dans le microscope, l'angle de sortie est

$$\alpha' = -\frac{\overline{A_1 B_1}}{f_2'} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \overline{AB}}{f_2'}$$

et le grossissement donné par

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \overline{AB}}{f_2' \overline{AB}/\delta} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \delta}{f_2'} \quad \boxed{G = -\gamma_{\text{obj}} G_{\text{oc}} = 400} .$$

6. On a toujours la chaîne de relations de conjugaison

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 .$$

Quand l'œil n'accorde pas, A se trouve dans la position déterminée dans la question 1 : $\overline{F_1 A} = -0,01 \text{ cm}$. Quand l'œil accorde au plus près, il forme sur la rétine l'image de l'objet situé au punctum proximum, à la distance δ à gauche de F_2' : $\overline{F_2' A_2} = -\delta$. Par la relation de Newton appliquée à L_2 , on en déduit

$$\overline{F_2 A_1} = -\frac{f_2'^2}{-\delta} = 0,25 \text{ cm} \quad \text{puis} \quad \overline{F_1 A_1} = \Delta + \overline{F_2 A_1} = 16,25 \text{ cm}$$

La relation de Newton appliquée à L_1 donne

$$\overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1 A_1}} = -0,00985 \text{ cm} .$$

Par rapport à la position de la question 1, le point A_1 s'est déplacé vers la droite de $15 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, c'est à dire $1,5 \mu\text{m}$. La latitude de mise au point est donc très faible : que l'œil accorde ou non, il voit observe presque au même endroit. L'observation se fait presque dans un plan, on voit de très fines tranches de l'objet.

On peut bien entendu utiliser la relation de conjugaison de Descartes et on obtient $\overline{O_1 A} = -0,40985 \text{ cm}$.

7. Soit O_1 le centre de l'objectif et O_1' son image par l'oculaire. On a $\overline{F_2 O_1} = -\Delta - f_1' = -16,4 \text{ cm}$. La relation de Newton appliquée à L_2 donne

$$\overline{F_2 O_1'} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2 O_1}} = 0,381 \text{ cm} .$$

On peut aussi utiliser la relation de Descartes et on obtient $\overline{O_2 O_1'} = 2,88 \text{ cm}$. Le cercle oculaire se situe légèrement en arrière de F_2' . Le grandissement entre les plans de front passant par O_1 et O_1' est

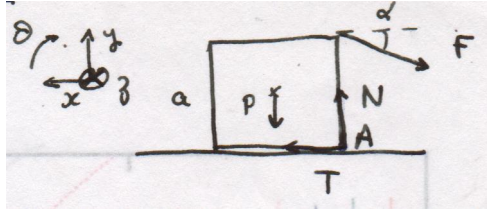
$$\gamma = -\frac{f_2'}{\overline{F_2 O_1}} = -0,152 .$$

Le diamètre du cercle oculaire est donc

$$D' = |\gamma| D = 1,07 \text{ mm} .$$

Tous les rayons lumineux qui entrent dans le microscope traversent l'objectif de diamètre D et, en sortant, tous traversent le cercle oculaire. En plaçant sa pupille dans le même plan que O_1' , l'observateur fera donc pénétrer dans son œil toute la lumière qui a traversé l'instrument et détectera ainsi une image bien lumineuse.

2. Basculement d'un cube



1. À la limite du basculement, la force qu'exerce la table sur le cube s'exerce en C et son moment en C est nul. Le moment du poids et celui de la force F ont pour somme

$$-mg\frac{a}{2} + aF \cos \alpha \quad .$$

D'après le théorème du moment cinétique, le cube commence à basculer si cette somme est positive, c'est à dire si

$$F \geq \frac{mg}{2 \cos \alpha} \quad .$$

2. Le membre de droite de l'inégalité est minimal si $\alpha = \alpha_{\min} = 0$. donc $F_{\min} = mg/2$.

3. Soit $\vec{R} = N\vec{u}_y + T\vec{u}_x$ la réaction exercée par la table sur le cube. Comme on se place à la limite de l'équilibre, on peut écrire que la somme des forces s'exerçant sur le cube est nulle, ce qui donne en projection

$$N = mg + F \sin \alpha \quad T = F \cos \alpha \quad .$$

Le mouvement sera exempt de glissement si $|T| \leq \mu N$. Pour $\alpha = \alpha_{\min}$ et $F = F_{\min}$, cela conduit à la condition $\mu \geq 1/2$.

4. En reprenant les expressions de N et T ci-dessus, la condition de non-glissement s'écrit

$$F \cos \alpha \leq \mu(mg + F \sin \alpha) \quad \text{d'où} \quad \tan \alpha \geq \frac{1 - 2\mu}{\mu} \quad .$$

D'après la question 1, la force minimale est atteinte lorsque α est le plus grand possible. Comme la fonction tangente croît sur $[0, \pi/2[$, il convient donc de choisir l'angle $\alpha'_{\min}$ dont la tangente est maximale, c'est à dire

$$\tan \alpha'_{\min} = \frac{1 - 2\mu}{\mu} \quad .$$

5. La force minimale cherchée s'obtient en remplaçant α par $\alpha'_{\min}$ dans le membre de droite de l'inégalité obtenue question 1. En utilisant la relation trigonométrique

$$\frac{1}{\cos \alpha'_{\min}} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha'_{\min}} \quad .$$

on obtient

$$F'_{\min} = \frac{mg}{2\mu} \sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1} \quad .$$

3. Réalisation approchée d'une fonction retard

1. La notion de fonction de transfert concerne des tensions sinusoïdales qu'on représente en notation complexe par $e(t) = E_0 e^{j\omega t}$ et $s(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$. La relation $s(t) = e(t - \tau)$ s'écrit

$$s(t) = E_0 e^{j(\omega(t-\tau))} = E_0 e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} = e(t) e^{-j\omega\tau} \quad .$$

La fonction de transfert est donc donnée par

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = e^{-j\omega\tau} \quad .$$

On voit que $|H(j\omega)| = 1$ donc $G_{dB} = 0$: la partie gain du diagramme de Bode est une droite horizontale. Comme $\varphi = \arg(H) = -\omega\tau$, la partie phase est une droite de pente $-\tau$ (si on porte en abscisse ω en échelle linéaire).

2. Le développement limité à l'ordre 2 de l'exponentielle permet d'écrire

$$H(j\omega) = 1 - j\omega\tau - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2 + o(\omega^2\tau^2) \quad .$$

L'approximation par le polynôme de degré deux est correcte si $\omega\tau \ll 1$.

3. Soit A le nœud où sont connectées les deux inductances et le condensateur. La relation du pont diviseur de tension permet d'écrire

$$s = \frac{R}{R + jL\omega} v_A \quad .$$

Pour éliminer v_A , utilisons la loi des nœuds en A en exprimant les trois intensités en fonction des potentiels.

$$\frac{e - v_A}{jL\omega} + \frac{s - v_A}{jL\omega} = v_A jC\omega \quad .$$

On en déduit

$$v_A = \frac{e + s}{2 - LC\omega^2}$$

puis on élimine v_A pour obtenir

$$H = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + 2jL\omega/R - LC\omega^2 - j\omega^3 L^2 C/R} \quad .$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 3.

4.

$$H = 1 - 2jL\omega/R + LC\omega^2 + (2jL\omega/R)^2 + o(\omega^2)$$

$$H \simeq 1 - 2jL\omega/R - \omega^2 \left(\frac{4L^2}{R^2} - LC \right)$$

5. Identifions ordre par ordre l'expression approximative ci-dessous à celle de la question 2. On obtient

$$\tau = \frac{2L}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\tau^2}{2} = \frac{4L^2}{R^2} - LC \quad .$$

En éliminant τ , on trouve

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2L}{C}} \quad \text{puis} \quad \tau = \sqrt{2LC} \quad .}$$

L'approximation d'ordre 2 de la question 2 est valide si $\omega\tau \ll 1$, c'est à dire si $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$. On remarque que

$$\frac{2\omega L}{R} = 2\omega L \sqrt{\frac{C}{2L}} = \sqrt{2}\omega\sqrt{LC} \quad .$$

Si $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$, alors $2\omega L/R \ll 1$ et $LC\omega^2 \ll 1$ ce qui valide aussi le DL de la question 4.

4. Atmosphère isotherme

Il s'agit d'une question de cours portant sur l'équilibre de l'atmosphère isotherme. En combinant la loi de la statique des fluides et l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient

$$P = P_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT}{Mg} \quad .$$

La pression vaut $P_0/2$ à l'altitude

$$z_{1/2} = H \ln 2 = 5,47 \text{ km} \quad .$$

5. Transformations de l'eau

1. Il s'agit du phénomène de surfusion. Il le manifeste par exemple lors de pluies verglaçantes : l'eau liquide arrive au sol à une température négative et le congèle rapidement après l'impact. Un phénomène analogue se produit dans les bouillottes magiques impliquant la surfusion de l'acétate de sodium.

2. Comme l'eau et la glace coexistent à l'équilibre dans l'état final, la température à l'issue de la transformation est T_f . La transformation a lieu à pression atmosphérique et le récipient est calorifugé : elle est donc isenthalpique. Comme l'enthalpie est une fonction d'état, on peut exprimer sa variation en décomposant la transformation en deux étapes hypothétiques : d'abord, l'eau voit sa température évoluer de T_0 à T_f , puis 50% de l'eau se solidifie. On obtient ainsi

$$\Delta H = mc_\ell(T_f - T_0) - 0,5m\ell_f \quad .$$

On en déduit

$$T_0 = T_f - 0,5 \frac{\ell_f}{c_\ell} = -39,5^\circ\text{C} \quad .$$

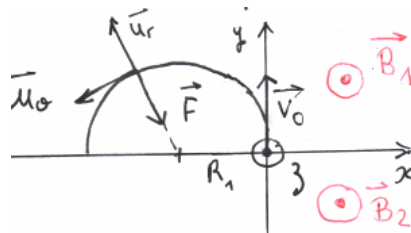
Pour une solidification totale et une température finale égale à T_f , il suffit de remplacer le coefficient 0,5 par 1 pour trouver $T_0 = -78,9^\circ\text{C}$. On devine que l'eau se solidifie entièrement si $T_0 < -78,9^\circ\text{C}$: dans ce cas, la température finale est inférieure à T_f et il faudrait ajouter au bilan enthalpique un nouveau terme correspondant au refroidissement de la glace. C'est l'objet de la question suivante.

3. Maintenant, $\Delta H = mc_\ell(T_f - T_0) - m\ell_f + mc_g(T_1 - T_f)$. Comme $\Delta H = 0$, on obtient

$$T_1 = T_f + \frac{\ell_f - c_\ell(T_f - T_0)}{c_g} = -42,1^\circ\text{C} \quad .$$

6. Dérive d'un électron dans un champ magnétique

1. L'électron est soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ orthogonale à la vitesse et qui ne travaille pas. D'après le théorème de la puissance cinétique, sa vitesse conserve donc une norme constante égale à v_0 . On sait qu'un électron en mouvement dans un champ magnétique uniforme et possédant une vitesse initiale orthogonale à ce champ présente un mouvement circulaire uniforme. On peut le démontrer en résolvant les équations cartésiennes du mouvement, en utilisant par exemple un détour par la notation complexe, mais l'énoncé ne le demande pas.



Ayant ainsi admis que le mouvement est circulaire, il est aisé d'exprimer son rayon. La vitesse est $\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta$ donc $\vec{F}_L = -ev_0 \vec{u}_\theta \wedge B_1 \vec{u}_z = -ev_0 B_1 \vec{u}_r$. En appliquant la seconde loi de Newton, on obtient par projection sur $\vec{u}_r$

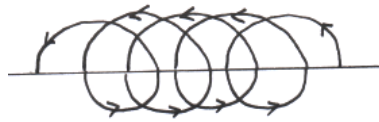
$$-m \frac{v_0^2}{R_1} = -ev_0 B_1 \quad \text{donc} \quad R_1 = \frac{mv_0}{eB_1} \quad .$$

2. L'électron atteint la zone où règne B_2 quand il a parcouru un demi-cercle de rayon R_1 ; le temps nécessaire pour cela est

$$t_1 = \pi R_1 / v_0 = \frac{m\pi}{eB_1} \quad .$$

Dans la région où règne B_2 , il décrit un nouveau demi-cercle de rayon $R_2 = mv_0 / (eB_2)$.

3. La durée du mouvement dans la seconde région est $t_2 = m\pi / (eB_2)$. À l'instant $t_1 + t_2$, l'électron regagne la première région et décrit à nouveau un demi-cercle de rayon R_1 . Comme $B_2 > B_1$, $R_2 < R_1$ et, après deux demi-tours, l'électron s'est décalé vers la gauche par rapport à sa position initiale. Ce phénomène se répète de sorte que peu à peu, il dérive vers les x négatifs. En deux demi-tours, c'est à dire pour une durée $t_1 + t_2$, le décalage est $2R_1 - 2R_2$.



On définit la vitesse de dérive v_d comme la vitesse moyenne après un nombre entiers de tours :

$$v_d = \frac{2R_1 - 2R_2}{t_1 + t_2} = \frac{2v_0 \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2}}{\pi \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}} = \frac{2v_0(B_2 - B_1)}{\pi(B_2 + B_1)} .$$

7. Oscillations d'un cadre dans un champ magnétique

1. Quand on lâche le cadre, il est rappelé vers le haut par le ressort puis se met à osciller. Dans ce mouvement, la portion du cadre plongée dans le champ magnétique se modifie de sorte que le flux magnétique traversant le cadre varie. Selon la loi de Faraday, il apparaît donc une fem induite dans le cadre et, puisqu'il s'agit d'un circuit fermé, un courant induit le parcourt. Le fil constituant le cadre est alors soumis à des forces de Laplace qui influencent le mouvement. Selon la loi de Lenz, on s'attend à ce que ces forces entravent les oscillations. L'écart initial à l'équilibre est de longueur $a/2$ et, puisque cet écart est appelé à décroître, le segment inférieur du cadre ne sortira jamais de la région où règne le champ.

2. La portion de cadre qui plonge dans le champ magnétique a pour hauteur $a/2 + z$. Le flux magnétique orienté comme le montre la figure est donné par

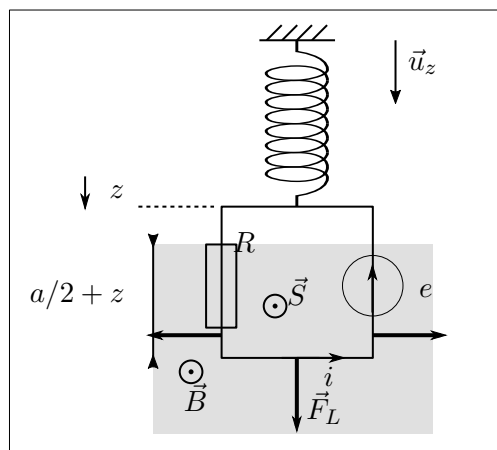
$$\Phi = Ba(a/2 + z) .$$

3. La fem induite, orientée en accord avec la surface dans la question précédente, s'obtient par la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba\dot{z}$$

et la loi des mailles $e = Ri$ donne l'intensité

$$i = -\frac{Ba\dot{z}}{R} .$$



4. Le cadre est soumis à :

- son poids $\vec{P} = mg \vec{u}_z$;
- la force de rappel du ressort $\vec{F}_R = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_z = -k(\ell_{eq} + z - \ell_0) \vec{u}_z$.

À l'équilibre, avant qu'on déplace le cadre, z vaut 0 et la force de rappel exercée par le ressort compense le poids :

$$mg \vec{u}_z - k(\ell_{eq} - \ell_0) \vec{u}_z = \vec{0} .$$

Cette remarque permet de simplifier deux termes dans la somme $\vec{P} + \vec{F}_R$ qui s'écrit

$$\vec{P} + \vec{F}_R = -kz \vec{u}_z .$$

- des forces de Laplace.

Le côté supérieur n'est jamais dans le champ et ne subit aucune force de Laplace. Les forces de Laplace s'exerçant sur les côtés verticaux droit et gauche se compensent. La force s'exerçant sur le côté inférieur est donnée par

$$\vec{F}_L = i\vec{a} \wedge \vec{B} = iaB\vec{u}_z \quad .$$

Finalement, la somme des forces s'écrit

$$-kz\vec{u}_z + iaB\vec{u}_z \quad .$$

5. En appliquant la seconde loi de Newton au cadre, on obtient en projection sur $\vec{u}_z$

$$m\ddot{z} = -kz + iaB \quad .$$

L'intensité n'est pas connue, on l'élimine en utilisant le résultat de la question 3. On obtient

$$\ddot{z} + \frac{a^2 B^2}{mR} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0 \quad .$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux. On adopte les notations canoniques pour la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{a^2 B^2}{mR} \quad .$$

L'équation différentielle se résout selon la technique de l'équation caractéristique, ce qui amène à exprimer son discriminant

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

puis à distinguer trois types de mouvements possibles.

— Si $\Delta < 0$, c'est à dire si $Q > 1/2$, le régime est pseudo-périodique.

$$z = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$$

— Si $\Delta = 0$, c'est à dire si $Q = 1/2$, le régime est critique.

$$z(t) = (At + B) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

— Si $\Delta > 0$, c'est à dire si $Q < 1/2$, le régime est apériodique.

$$z = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t} \quad r_{1/2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1/(4Q^2) - 1}$$

En principe, il faudrait encore déterminer les constantes A et B avec les conditions initiales

$$z(0) = a/2 \quad \dot{z}(0) = 0 \quad .$$

Il est plus intéressant de tracer schématiquement la courbe montrant z en fonction du temps dans les trois cas. Je vous laisse vous reporter au cours de PCSI pour cela. Dans tous les cas, le cadre revient asymptotiquement vers sa position d'équilibre.

Voyage vers Mars
Centrale PC 22

Q1. La force de gravitation entre deux astres de masses M_1 et M_2 séparés d'une distance d s'exprime par $F = GM_1M_2/d^2$. On en déduit que G a pour dimension $M^{-1}.L^3.T^{-2}$. Dans le système international d'unités, cette constante s'exprime en $\text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$.

Q2. Question de cours utilisant le théorème du moment cinétique et le caractère central de la force gravitationnelle.

Q3. Encore une question de cours. $C = r^2\dot{\theta} = L_O/m$ se nomme constante des aires.

Q4. Dans le cas d'une orbite circulaire, la seconde loi de Newton appliquée dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen au corps de masse m s'écrit en projection sur $\vec{u}_r$

$$-m\frac{V}{R} = \frac{GM_s m}{R^2} \quad \text{d'où} \quad V = \sqrt{\frac{GM_s}{R}} \quad V_T = 29,8 \text{ km.s}^{-1} \quad V_M = 24,2 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

Q5. On connaît l'expression $E_p = -GM_s m/R$. L'énergie mécanique est donnée par

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GM_s m}{R} = \frac{1}{2}\frac{GM_s m}{R} - \frac{GM_s m}{R} \quad \boxed{E_p = -\frac{1}{2}\frac{GM_s m}{R}} \quad .$$

Q6.

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM_s/R}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_s}}$$

Q7. La trajectoire est une ellipse dont le Soleil est un foyer. Elle est tangente aux deux orbites circulaires en deux points où la vitesse est perpendiculaire à $\vec{OM}$. Sur une trajectoire elliptique, cette configuration ne se rencontre qu'aux deux extrémités du grand axe, au périhélie et à l'aphélie. Comme le rayon de l'orbite de Mars est supérieur à ce celui de l'orbite de la Terre, le point de départ est le périhélie et le point d'arrivée est l'aphélie.

Q8. Cette question se résout en utilisant la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la connaissance du périhélie et de l'aphélie détermine la longueur du grand axe qui, pour une orbite elliptique, est directement liée à l'énergie mécanique, elle-même liée à la vitesse initiale.

La longueur du grand axe est $2a = a_T + a_M$ et l'énergie mécanique donnée par

$$E_m = -\frac{GM_s m}{2a} = -\frac{GM_s m}{a_T + a_M} \quad .$$

En exprimant cette énergie à l'instant initial, on obtient

$$-\frac{GM_s m}{a_T + a_M} = \frac{1}{2}mV_T^2 - \frac{GM_s m}{a_T} \quad .$$

On en déduit

$$V'_T = \sqrt{\frac{2GM_s a_M}{a_T(a_T + a_M)}} = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} \quad \Delta V_T = V_T \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1 \right) = 2,93 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

Q9. Soit T la période de rotation sur l'ellipse; elle est donnée par la troisième loi de Kepler vue dans la question 4, en remplaçant R par $a = (a_T + a_M)/2$. Ici, le vaisseau parcourt seulement une demi-ellipse donc

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2}}{\sqrt{GM_s}} = 22,34.10^6 \text{ s} = 258,7 \text{ jours} \quad .$$

Q10. Pendant que le vaisseau parcourt la demi-ellipse, Mars se déplace sur son orbite et, pour qu'elle se trouve à l'aphélie A lorsque le vaisseau atteint ce point, elle doit se trouver largement « en arrière » de ce point à l'instant $t = 0$ où le vaisseau est parti de P . Plus précisément, la vitesse angulaire de Mars sur son orbite est

$$\omega_M = \frac{v_M}{a_M} = \sqrt{\frac{GM_s}{a_M^3}} \quad .$$

Pendant la durée Δt du vol, elle parcourt l'angle $\omega_M \Delta t$ donc $\theta_M(\Delta t) = \theta_M(0) + \omega_M \Delta t$. La condition $\theta_M(\Delta t) = \pi$ équivaut à $\theta_M(0) = \pi - \omega_M \Delta t$ ce qui donne après élimination de ω_M et Δt :

$$\alpha_0 = \theta_M(0) = \pi \left[1 - \left(\frac{a_T + a_M}{2a_M} \right)^{3/2} \right] \quad \alpha_0 = 0,245\pi = 44^\circ \simeq \pi/4 \quad .$$

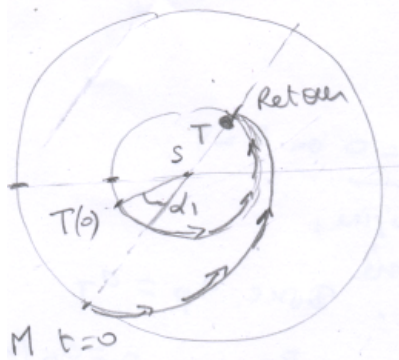
Q11. Dans le cas envisagé, le vaisseau parcourt la seconde moitié de l'ellipse et revient sur l'orbite terrestre après une durée $2\Delta t$. Pendant ce temps, la Terre a tourné sur son orbite à la vitesse angulaire $\omega_T = \sqrt{GM_s/a_T^3}$ et atteint la position angulaire

$$\begin{aligned} \theta_T(2\Delta t) &= \omega_T T = \sqrt{GM_s/a_T^3} \times 2\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM_s}} \\ \theta_T(2\Delta t) &= 2\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2a_T} \right)^{3/2} = 2\pi \times 1,41 \quad . \end{aligned}$$

La terre a donc parcouru plus d'un tour sur son orbite, presque un tour et demi. Elle ne se trouve plus du tout au même endroit que lors du lancement et le vaisseau, en revenant près de l'orbite terrestre au point de lancement, ne retrouvera pas la Terre.

Q12. Pendant ce voyage retour, le vaisseau parcourt une demi-ellipse et son angle polaire augmente de π pendant une durée Δt égale à celle du voyage aller. Pendant ce temps, la Terre tourne plus rapidement sur son orbite circulaire à la vitesse angulaire $\omega_T \Delta t$. Pour que les deux objets coïncident à la fin du trajet retour, il convient donc que la Terre présente au départ un retard de phase

$$\alpha_1 = \omega_T \Delta t - \pi = \sqrt{\frac{GM_s}{a_T^3}} \pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM_s}} - \pi \quad \boxed{\alpha_1 = \pi \left[\left(\frac{a_T + a_M}{2a_T} \right)^{3/2} - 1 \right] = 0,414\pi = 74,6^\circ} \quad .$$



Q13. Cette question est assez difficile alors que la formulation de l'énoncé laisse penser que la réponse se déduit facilement de la précédente !

La Terre tourne à la vitesse angulaire ω_T et Mars à la vitesse angulaire ω_M plus faible. Ainsi, $\theta_T - \theta_M$ croît un fil du temps à la vitesse angulaire relative $\omega_T - \omega_M$. Lorsque le vaisseau atteint Mars en A, la Terre se trouve à l'angle $\omega_T \Delta t$ et possède donc une avance de phase $\omega_T \Delta t - \pi = \alpha_1$ (j'ai placé cette position de la Terre sur la figure). Au contraire, lorsque le vaisseau repart de Mars, la Terre doit se trouver en retard de l'angle α_1 . La Terre doit donc acquérir un retard de phase de $-2\alpha_1$. Comme la Terre tourne plus vite que Mars, ce retard s'entend modulo 2π . En tournant plus vite que Mars, la Terre tend à la rattraper par l'arrière. Autrement dit, $\theta_T - \theta_M$ augmente de $2\pi - 2\alpha_1$ entre l'arrivée sur Mars et le début du voyage retour. La durée δt de séjour sur Mars est donc telle que

$$(\omega_T - \omega_M)\delta t = 2\pi - 2\alpha_1 \quad \text{d'où} \quad \delta t = \frac{2(\pi - \alpha_1)}{\sqrt{\frac{GM_s}{a_T^3}} - \sqrt{\frac{GM_s}{a_M^3}}} \quad \delta t = 39,7 \cdot 10^6 \text{ s} = 459 \text{ j} \quad .$$

Au lancement depuis la Terre, Mars doit être en avance de α_0 , et à nouveau cette avance est définie modulo 2π et la configuration souhaitée se reproduit périodiquement avec une période qui définit l'intervalle entre deux lancements possibles :

$$T_{\text{lance}} = \frac{2\pi}{\omega_T - \omega_M} = 67,8 \cdot 10^6 \text{ s} = 784 \text{ j} \quad .$$

Q14. Voir le document réponse.

Q15. À $t = 0$, la vitesse du vaisseau est tangent à l'orbite terrestre, donc perpendiculaire au vecteur position. Sur une trajectoire elliptique, cela ne se rencontre qu'au périhélie et à l'aphélie, donc le point de départ est soit l'un soit l'autre de ces deux points. Or, dans les premiers instants, la distance r croît donc la position initiale ne constitue par un maximum de distance. Ainsi, le début de la trajectoire correspond à son périhélie et $r_P = a_T$.

On peut fournir une réponse plus formelle. À partir de l'équation de la conique fournie, on calcule

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad .$$

Le périhélie et l'aphélie correspondent à des extremums de r et à l'annulation de cette dérivée. Elle se produit lorsque $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, avec des valeurs de r

$$r_{\min} = r_p = r(0) = \frac{p}{1+e} \quad r_{\max} = r_a = r(\pi) = \frac{p}{1-e} \quad .$$

Au lancement, $\theta = 0$ donc on se trouve au périhélie, et on sait que $r(0) = r_T$. Donc $r_P = a_T$.

Q16. On vient de montrer que $a_T = p/(1+e)$. À l'arrivée sur Mars, $r = a_M$ et $\theta = 3\pi/4$ donc

$$a_M = \frac{p}{1 - \frac{e}{\sqrt{2}}} \quad p = a_M \left(1 - \frac{e}{\sqrt{2}}\right) \quad .$$

En éliminant p entre ces deux relations, on obtient facilement

$$e = \frac{a_M - a_T}{a_T + \frac{a_M}{\sqrt{2}}} \quad e = 0,251 \quad .$$

Ce n'est pas demandé, mais pour faciliter le tracé de la trajectoire on peut calculer

$$r_{\max} = \frac{a_M(1 - e/\sqrt{2})}{1 - e} = 1,09 a_M \quad .$$

Q17. Le grand axe de la trajectoire elliptique est

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} = \frac{2a_T(1+e)}{1-e^2} = \frac{a_T}{1-e} \quad .$$

En reprenant l'expression de l'énergie mécanique vue à la question 5, dans laquelle on remplace $2R$ par $2a$, on obtient

$$E_m = -\frac{GM_s m(1-e)}{2a_T} = -\frac{1}{2}mV_T^2(1-e) \quad .$$

Q18. On évalue E_m comme la somme $E_c + E_p$ à $t = 0$.

$$E_m = \frac{1}{2}mV_T'^2 - \frac{GM_s m}{a_T} = \frac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2 \quad .$$

En l'identifiant à l'expression obtenue dans la question précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2 = -\frac{1}{2}mV_T^2(1-e) \quad \text{d'où on tire} \quad \boxed{V_T'' = \sqrt{1+e} V_T} \quad .$$

Q19.

$$\Delta V_T' = (\sqrt{1+e} - 1) V_T = 0,118 V_T = 3,47 \text{ km.s}^{-1}$$

Q20. C est une constante du mouvement ; on la trouve grâce aux conditions initiales

$$C = r \times r\dot{\theta} = a_T V_T'' \quad .$$

Q21. Comme $C = r^2 d\theta/dt$, le temps mis pour balayer l'angle $d\theta$ est $dt = r^2 d\theta/C$. Avec l'équation de la conique,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{a_T(1+e)}{1 + e \cos \theta} \quad \text{donc} \quad dt = \frac{a_T^2(1+e)^2}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{a_T V_T''} = \frac{a_T(1+e)^2 d\theta}{a_T V_T''(1 + e \cos \theta)^2} \quad .$$

On obtient le temps de parcours par intégration

$$\Delta t' = \int_0^{\Delta t'} dt = \frac{a_T(1+e)^2}{V_T''} \int_0^{3\pi/4} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2,15 a_T(1+e)^2}{V_T''} \quad \Delta t' = 15,1 \cdot 10^4 \text{ s} = 175 \text{ j} \quad .$$

Questions 7 et 10

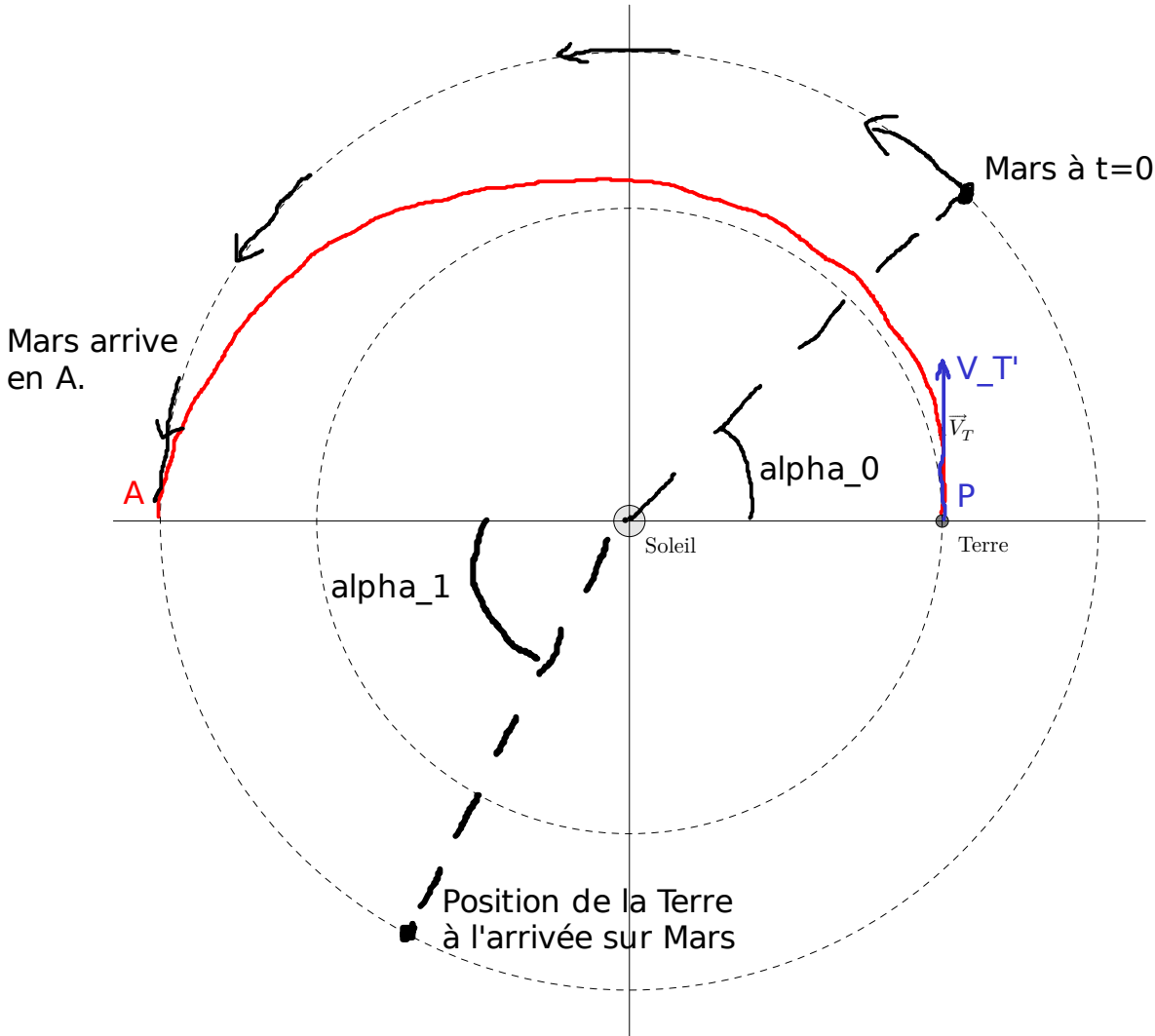


Figure A

Questions 14 et 16

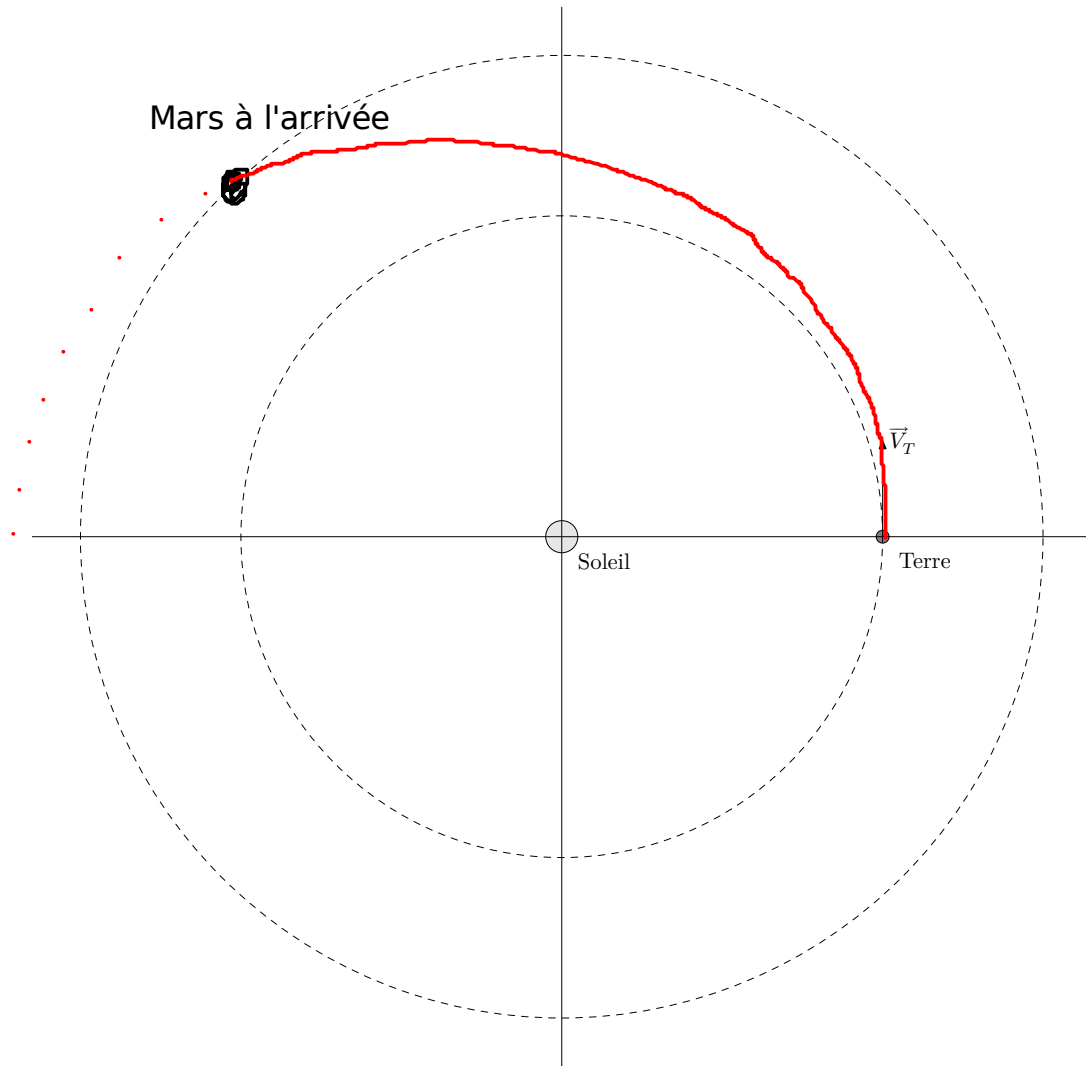


Figure B