

DEVOIR N° 2

Pour le vendredi 11 septembre

Principe de l'autofocus

Banque PT

Un appareil photo est modélisé par une lentille mince convergente (L), l'objectif, de focale $f'_0 = 10$ cm et un plan récepteur (P) placé orthogonalement à l'axe optique. Ce plan récepteur est de taille $20\text{ mm} \times 30\text{ mm}$ et contient 6 méga pixels. Lorsque le réglage de l'appareil est optimal, l'image de l'objet à photographier se trouve sur le plan (P). Sinon, il convient de modifier la position de ce plan.

Prenons l'exemple d'un objet réduit à un point objet A_0 qui donne un point image A . En cas de défaut de réglage, on a la situation décrite sur la figure (1).

Sur (P) se forme alors une tache à la différence d'un point. Il faut donc déplacer le plan (P) d'une certaine distance pour obtenir une image nette. Pour cela la méthode la plus rapide consiste à calculer cette distance à partir de la différence d'ordonnées des points inférieurs et supérieurs de la tâche. Il y a cependant une difficulté du fait que l'on obtient la même tache que (P) soit placé devant ou derrière l'image. Nous allons étudier un dispositif astucieux qui permet de calculer algébriquement le déplacement à opérer partant d'un défaut de réglage.

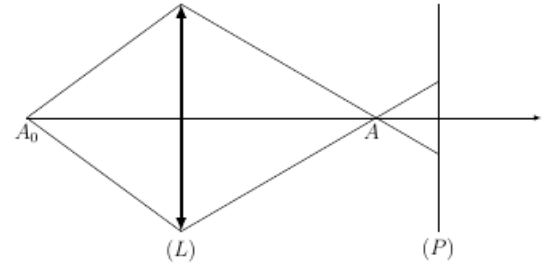


FIGURE 1 – Défaut de réglage,

I Mise au point

Dans cette partie on attend, pour chaque question, une expression littérale puis une valeur numérique. On souhaite photographier un objet de hauteur $h = 10$ cm, transverse à l'axe de l'objectif et situé à une position $x_0 = -2$ m, l'origine étant prise au centre de la lentille (L). L'axe optique est orienté de la gauche vers la droite.

1. À quelle distance d' du centre de la lentille (L) faut-il placer (P) pour avoir une image nette (ceci définit le plan P_0) ? Donner la taille h' de l'image.

On se place dans le cas où l'objet précédent se ramène à un point situé sur l'axe toujours à la position $x_0 = -2$ m. (P) est placé à une distance $\delta = 0,5$ cm derrière (P_0). La lentille a un rayon $a = 5$ cm (figure 2). On observe alors une tache lumineuse sur (P).

2. Déterminer le rayon a' de la tache lumineuse.

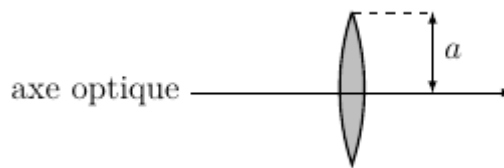


FIGURE 2 – Illustration de la lentille

3. Après avoir déterminé la taille d'un pixel, supposé carré, donner un critère sur a , puis sur δ pour que l'image transmise par le capteur soit nette.

II Principe de l'autofocus

Dans un souci de simplification on considère un objet réduit à un point objet situé sur l'axe de la lentille (L) qui donne un point image noté A . Pour déterminer si A se trouve ou non sur (P) on utilise deux lentilles annexes (L_1) et (L_2), situées à une distance d_0 de (P), de focale f' et de rayon a auxquelles sont associés des capteurs plans (P_1) et (P_2) situés à une distance d de chaque lentille. (P_1) (respectivement (P_2)) est conjugué de (P) par (L_1) (respectivement (L_2)). Attention : en réalité les deux lentilles sont désaxées par rapport à l'axe optique de

(L), les rayons étant déviés par des miroirs. Ici, on considère simplement que tout se passe comme si (P) était transparent. La situation est représentée sur la figure (3).

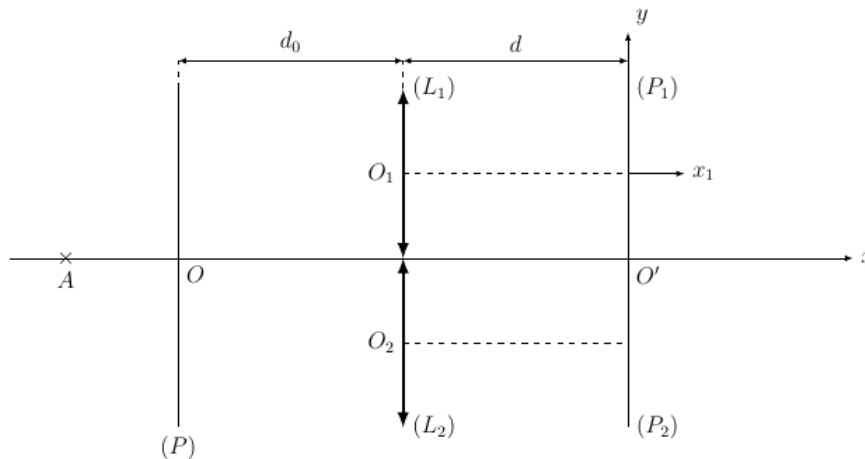


FIGURE 3 – Principe des lentilles de l'autofocus

4. Exprimer d en fonction de d_0 et f' .

5. On se place dans le cas où A est sur (P). On note A_1 son image par (L_1). Faire un schéma représentant A , A_1 , F'_1 (le foyer image de (L_1)) et les rayons issus de A passant par les bords inférieurs et supérieurs de (L_1).

6. Déterminer l'ordonnée y_1 de A_1 en prenant l'origine O' située sur l'axe (Ox). En déduire l'expression de y_2 l'ordonnée de A_2 l'image de A par (L_2) en prenant également l'origine en O' .

7. Calculer $\Delta\Phi_0 = y_1 - y_2$ (appelé différence de phase, même si c'est une longueur) que l'on exprimera en fonction de d_0 , d et a .

On se place dans le cas où A est avant le plan (P) (cas de la figure 3) et on pose $\overline{OA} = p$ (mesure algébrique). On note à nouveau A_1 l'image de A par (L_1).

8. Construire A_1 sur le document réponse fourni en annexe.

On note x_1 l'abscisse de A_1 mesurée sur l'axe (O_1x_1) que l'on ne cherchera pas à exprimer et qui sera donc considérée comme une donnée. Déterminer son ordonnée y_1 mesurée à partir de l'axe (Ox) en fonction de a , x_1 , d_0 et p .

9. Sur le document réponse, tracer les rayons issus de A passant par les extrémités des lentilles (L_1) et (L_2).

On obtient donc une tâche lumineuse. On note y_s l'ordonnée du point supérieur de la tâche lumineuse sur (P_1) et y_i l'ordonnée du point inférieur de cette tâche, l'origine étant en O' sur l'axe (Ox).

10. Exprimer y_s en fonction de y_1 , x_1 et d et montrer que $y_i = 2a \left(1 - \frac{d}{x_1}\right) + \frac{dy_1}{x_1}$.

Le principe de la méthode est de mesurer ce qui est appelé « la différence de phase » définie par $\Delta\Phi = y_s - y'_s$ où y_s est l'ordonnée du point supérieur de la tâche lumineuse sur (P_2), ce qui revient à déterminer $\Delta\Phi = y_s + y_i$.

11. Pourquoi a-t-on $y_i = -y'_s$? Montrer que $\Delta\Phi = 2a + \frac{2ad}{d_0 - p}$.

12. Évaluer la différence de différence de phase entre le cas où la mise au point n'est pas réalisée et celui où elle l'est. Soit $\Delta^2\Phi = \Delta\Phi - \Delta\Phi_0$.

Le principe de l'auto focus consiste donc à mesurer la différence de phase et d'en déduire p . Il suffit ensuite de déplacer la lentille (L) afin de faire coïncider A sur (P).

13. On mesure $\Delta^2\Phi = 0,66$ cm. Donner la distance de laquelle on doit tradater (P) pour obtenir une image nette. On précisera la direction de la translation. On a $d = 2f'$ et $d_0 = 2f'$ avec $f' = 10$ cm et $a = 3$ cm.

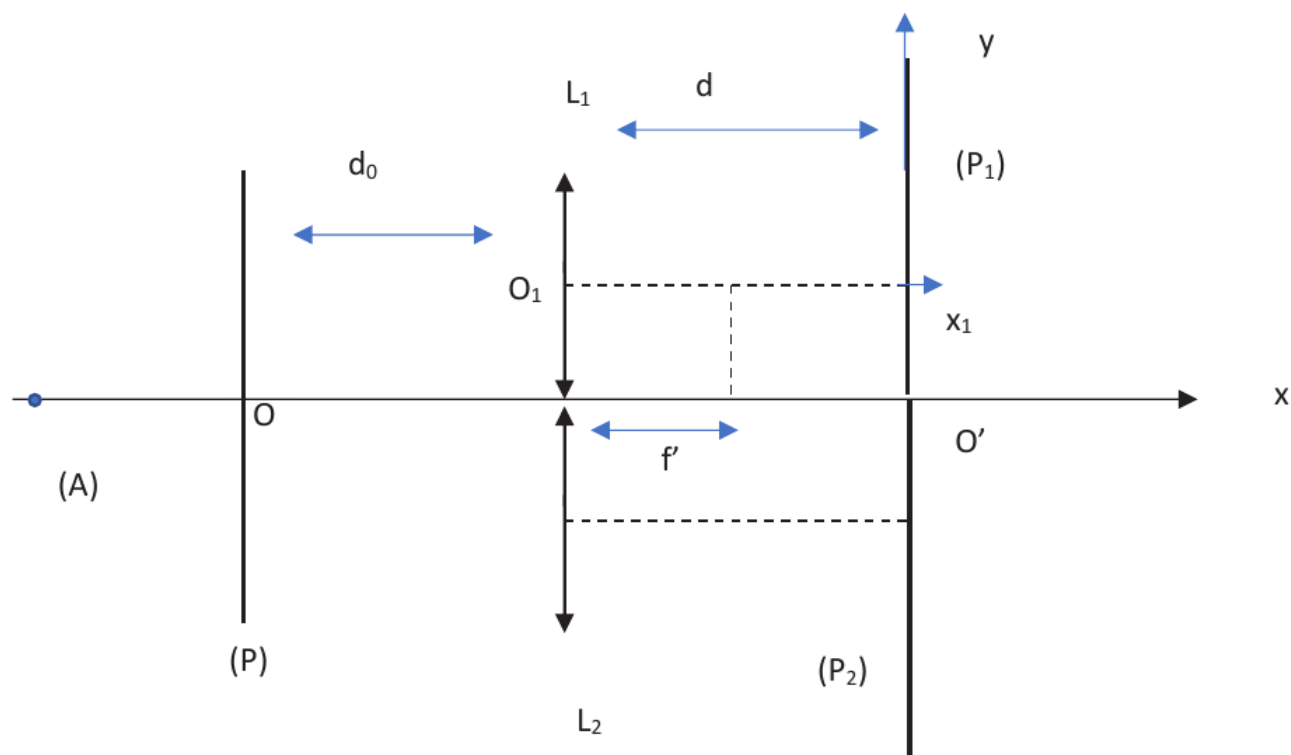


FIGURE 4 – Document réponse pour le problème sur l'autofocus

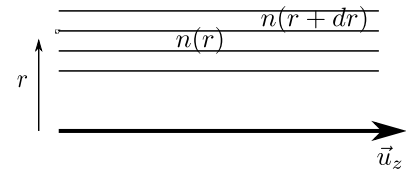
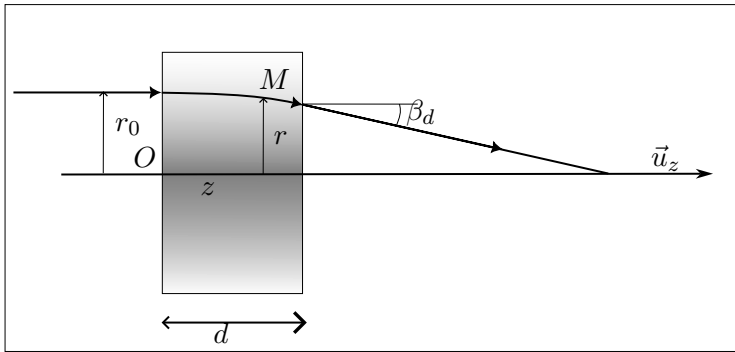
Lentille à gradient d'indice

Petit problème maison

Un lentille à gradient d'indice présente la forme d'un cylindre de longueur d et de rayon R , constitué d'un verre d'autant moins réfringent qu'on s'éloigne de l'axe de révolution $(O, \vec{u}_z)$. Plus précisément, l'indice n varie avec la coordonnée cylindriques r selon la loi

$$n(r) = n_0 \sqrt{1 - \frac{2r^2}{a^2}} \quad \text{avec} \quad r \in [0, R].$$

En pratique, $R \ll a$ de sorte que les variations d'indice sont très petites et qu'on pourra limiter les calculs au plus bas ordre en r/a . Dans un tel milieu, un rayon lumineux arrivant parallèlement à l'axe optique est progressivement dévié selon un processus que vous allons analyser.



1. On adopte le modèle du milieu stratifié : le verre est vu comme une succession de couches superposées d'épaisseur infinitésimale dr et d'indice uniforme. Dans une couche, cet indice vaut $n(r)$ et dans la suivante, il vaut $n(r + dr)$ (partie droite de la figure). En suivant ce modèle, tracer schématiquement le cheminement d'un rayon très légèrement incliné vers le bas au départ et justifier le sens dans lequel il s'incurve.

2. Un point M dans la lentille est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, z) . Le long de la courbe, on considère que r est un fonction de z : $r = r(z)$. De même, l'angle i d'incidence du rayon sur les dioptries $r = Cste$ est une fonction de r : $i = i(r)$. On note r_0 la hauteur d'entrée du rayon. Justifier que

$$n(r_0) = n(r) \sin i(r) \quad .$$

3. On admet la relation géométrique suivante :

$$\sin i = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}} \quad \text{où} \quad r' = \frac{dr}{dz} \quad .$$

Établir l'équation différentielle

$$r'' + \frac{2}{a^2}r = 0 \quad .$$

Quel terme faut-il négliger pour parvenir à ce résultat ? En toute rigueur, cette équation ne peut être établie que sur des intervalles où r' est non nulle, mais on admettra sa validité partout.

4. Le rayon pénètre horizontalement en $r = r_0$. Exprimer $r(z)$.

5. Déterminer le point où le rayon émerge de la lentille et sa pente en ce point.

6. Montrer que lorsqu'il sort de la lentille, le rayon forme avec l'horizontale l'angle

$$\beta_d \simeq \frac{2n_0 r_0 d}{a^2} \quad .$$

7. Trouver le point où le rayon émergent croise l'axe optique et vérifier que ce point ne dépend pas de r_0 dans l'approximation de Gauss.

8. Quelle est la distance focale de cette lentille, définie comme la distance entre la face de sortie et le foyer ?

On souhaite maintenant étudier les propriétés de cette lentille du point de vue de l'optique ondulatoire. Pour calculer les phases, on néglige la courbure des rayons lumineux : ils voyagent presque horizontalement dans le verre, le point de sortie est presque à la même hauteur r_0 que le point d'entrée.

9. En raisonnant sur la phase et/ou sur le chemin optique, expliquer qualitativement (sans calcul) pourquoi ce système peut se comporter de manière analogue à une lentille convergente.

10. On considère une onde plane incidente sur la lentille et on note Ψ sa phase spatiale. Soit $N(r, d)$ un point sur la face de sortie. Exprimer $\Psi(N) - \Psi(0)$ en fonction de n_0 , a , d et r .

11. Dans une lentille plan-convexe traditionnelle, formée de verre d'indice n , l'épaisseur e dépend de r selon la relation

$$e = e_0 - \frac{r^2}{2R} \quad \text{où } R \text{ est le rayon de courbure.}$$

On démontre alors que la distance focale est donnée par

$$f' = \frac{R}{n-1} \quad .$$

On considère le point $N(r, e_0)$ représenté sur la figure. Exprimer $\Psi(N) - \Psi(0)$ en fonction de n , e_0 , r et R .

12. Justifier que la lentille à gradient d'indice fait converger l'onde plane en un point (c'est le foyer) et retrouver l'expression de sa distance focale.

