

DEVOIR N° 3

Pour le lundi 21 septembre

Mesure de l'épaisseur d'une lame

d'après le concours PT

Le physicien néerlandais Frits Zernike a obtenu en 1953 le prix Nobel de physique pour l'invention du microscope à contraste de phase. Dans des travaux préliminaires à cette découverte, il a utilisé un montage interférentiel à trois fentes pour contrôler ou mesurer l'épaisseur d'une fine lame transparente à faces parallèles, et c'est cette technique que nous étudions ici. Dans toute cette partie, on suppose les rayons lumineux très peu inclinés par rapport à l'axe optique.

Système interférentiel à deux fentes

On considère d'abord un système de deux fentes F_1 et F_2 très fines perpendiculaires au plan de la figure 1. Elles sont distantes de $2a$ et de grande longueur. L'ensemble est éclairé par une source S ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ placée au foyer objet d'une lentille convergente. L'observation de la figure d'interférences se fait sur un écran situé dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale image f' . On s'intéresse aux ondes reçues au point M d'ordonnée z sur l'écran et on suppose z et a très petits devant f' .

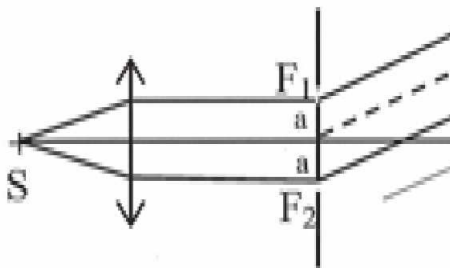


FIGURE 1 – Dispositif interférentiel à deux fentes

On adopte le modèle scalaire de la lumière et on note s_0 l'amplitude associée au rayon fictif (en pointillés sur la figure) provenant du milieu des deux fentes. Les amplitudes complexes des deux rayons issus de F_1 et F_2 et déphasés d'un angle 2φ sont alors : $s_1 = s_0 e^{j\varphi}$ et $s_2 = s_0 e^{-j\varphi}$. On note E_0 l'éclairement produit par le rayon fictif, identique aux éclairements produits par les rayons émis par F_1 et F_2 .

1. Exprimer φ en fonction de a , f' , z et λ en explicitant soigneusement le raisonnement.
2. Exprimer l'éclairement E résultant de l'interférence des deux ondes en fonction de E_0 et φ . Tracer l'allure du graphe de E en fonction de φ .

Système interférentiel à trois fentes

3. On ajoute une troisième fente F_0 identique aux deux autres et placée en leur milieu.
 - a) Exprimer le nouvel éclairement E en fonction de E_0 et de φ .
 - b) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant.

φ	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	2π
E/E_0					

- c) Tracer l'allure de la courbe donnant E/E_0 en fonction de φ puis décrire l'allure de l'écran.
4. On ajoute devant la fente centrale F_0 et parallèlement au plan des fentes une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice $n = 1,5$. Comme e est très faible, on considère que le rayon lumineux qui traverse cette lame parcourt une épaisseur e dans le verre, sans être dévié.
 - a) La lame introduit un retard de phase de $\pi/2$ pour le rayon central. Montrer que l'on retrouve sur l'écran une alternance régulière de franges brillantes et de franges sombres (pas forcément noires), contrairement à ce qui se passait dans la question précédente. Quel est l'interfrange ?
 - b) Si on veut contrôler par cette méthode une lame d'épaisseur $e = 0,3 \mu\text{m}$, quelle valeur faut-il choisir pour λ ?

5. Si on veut mesurer e , on peut déplacer l'écran de $x = \overline{OO'}$ de façon à retrouver la même figure d'interférence que celle qu'on avait en l'absence de lame (figure 2). Le point O' est tel que les trois rayons issus des trois fentes sont à nouveau en phase, comme ils l'étaient en O sans la lame.

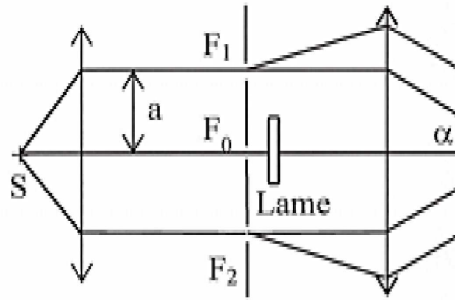


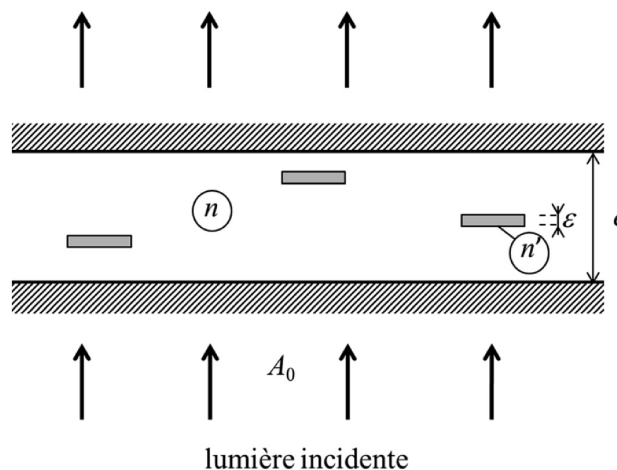
FIGURE 2 – Déplacement de l'écran

- Justifier, à partir de l'observation de la figure 2, que les fentes sont ici dans le plan focal objet de la lentille de projection.
- Soit δ la différence de marche que présente en O le rayon venu de F_0 par rapport à ceux venant de F_1 ou F_2 . Soit δ' la différence de marche analogue pour les rayons parvenant en O' . Exprimer δ' en fonction de δ , x et α .
- Exprimer x en fonction de n , e et α de manière à ce que la condition de phase exposée au début de la question 5 soit satisfaite.
- On donne $a = 0,10 \text{ mm}$, $f' = 10 \text{ cm}$, $n = 1,5$ et on mesure $x = -1,0 \text{ cm}$. Calculer numériquement e .

Contraste interférentiel

CCP

Sur la platine d'un microscope est posée une préparation très mince et transparente, immergée dans un liquide d'indice n et comprise entre deux lamelles de verre identiques dont les faces en regard, semi-argentées, sont parallèles. Les détails de la préparation peuvent être assimilés à de petites lames à faces parallèles d'indice n' , d'épaisseur ϵ très faible, parallèles aux faces semi-argentées (figure ci-dessous). L'ensemble est éclairé par transmission en incidence normale par un faisceau parallèle de lumière monochromatique ($\lambda = 546 \text{ nm}$) à l'aide d'un trou placé au foyer objet d'un condenseur non représenté dans la figure. Un objectif placé au dessus de la préparation permet d'observer celle-ci.



I. Observation en l'absence de détails

Les deux lamelles de verre semi-argentées présentent un coefficient de réflexion pour l'amplitude r et un coefficient de transmission t , réels positifs compris entre 0 et 1 tels que $r^2 + t^2 = 1$, et introduisant un déphasage Ψ à leur traversée. Une onde se propageant dans la cavité ainsi formée émet à chaque aller-retour un rayon émergent (figure 3).

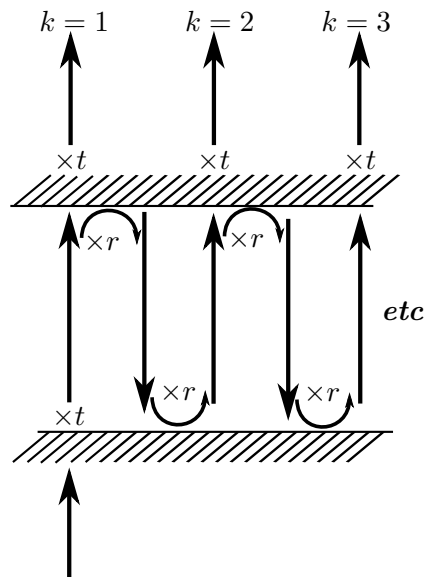


FIGURE 3 – Série de rayons obtenus par transmission et réflexion successives d'un unique rayon incident. Par souci de clarté, ces rayons ont été représentés à des positions distinctes. Ils sont en réalité tous portés par la même droite.

En négligeant tout phénomène de réfraction (les rayons incidents sont considérés comme ayant une incidence normale aux lames), l'amplitude complexe à la sortie de la lame du k^{e} rayon émergent s'écrit sous la forme $A_k \exp(-i\phi_k)$ où A_k est l'amplitude du rayon et ϕ_k sa phase.

1. Exprimer le déphasage $\varphi = \phi_{k+1} - \phi_k$ en fonction de l'épaisseur de la cavité e , de l'indice n du milieu et de la longueur d'onde λ de la lumière incidente dans le vide.
2. Calculer le rapport des amplitudes de deux rayons successifs $\frac{A_{k+1}}{A_k}$ en fonction du coefficient de réflexion r des deux lames.
3. Exprimer A_1 puis en déduire l'amplitude complexe du k^{e} rayon émergent, en prenant comme origine des phases celle du rayon incident entrant à travers la lame inférieure dont l'amplitude complexe s'écrit A_0 .
4. Écrire sous forme de série l'amplitude complexe résultant de la superposition de l'ensemble des rayons émergents de $k = 1$ à l'infini. Le coefficient r est inférieur à 1.
5. Pour quelles valeurs de φ cette amplitude complexe prend-elle un module maximal ?
6. Exprimer l'intensité lumineuse I . La figure ?? représente les variations de l'intensité lumineuses en fonction de φ , pour trois valeurs de r : $r = 0,7$, $r = 0,8$ et $r = 0,9$. Reproduire ces courbes en utilisant un outil informatique. Le langage python et son module matplotlib sont recommandés. Associer chaque valeur de r à l'une des courbes a, b et c. Commenter l'influence de r .
7. Montrer que l'intensité lumineuse peut s'écrire sous la forme

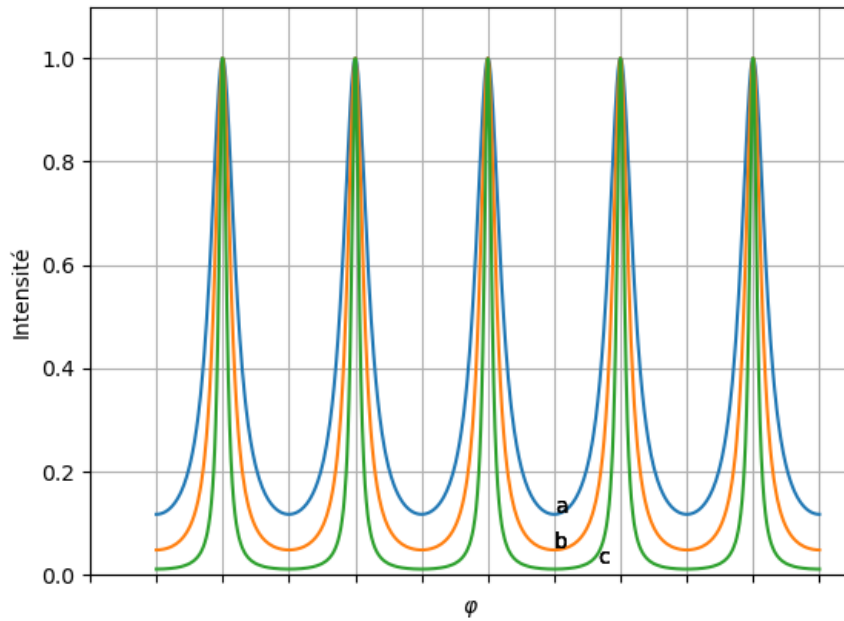
$$I = \frac{I_0}{1 + m \sin^2(\varphi/2)} \quad \text{avec} \quad m = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2} \quad .$$

8. Calculer m pour $r = 0,9$.
9. Rechercher les valeurs de φ autour d'un maximum telles que $I = I_{\max}/2$. En déduire la largeur à mi-hauteur des pics. On simplifiera l'expression en tenant compte de fait que r est proche de 1. Vous pouvez vérifier grossièrement la réponse à partir de la figure ??.
10. Lorsque r est très proche de 1, quel est en général l'aspect de la préparation observée au microscope ?

II. Observation en présence de détails

Les réflexions sur les faces d'un détail sont négligeables si bien qu'un rayon lumineux traversant un détail peut être considéré comme intégralement transmis.

1. Comme à la question I.1, exprimer le déphasage entre deux rayons émergents successifs $\varphi' = \Phi'_{k+1} - \Phi'_k$, mais dans une zone comportant un détail, en fonction des épaisseurs de la cavité e et du détail ϵ , des indices de réfraction n du milieu et du détail n' et de la longueur d'onde λ de la lumière incidente.

FIGURE 4 – Courbes d'intensité pour 3 valeurs de r

Exprimer φ' sous la forme $\varphi' = \varphi + \Delta\varphi$ avec $\Delta\varphi$ dépendant uniquement de n , n' , ϵ et λ . Calculer $\Delta\varphi$ pour une préparation d'indice 1,515 contenant un détail d'épaisseur $\epsilon = 0,6 \mu\text{m}$ et d'indice de réfraction 1,520. Remarquer que la valeur de $\Delta\varphi$ est petite devant π .

2. Comment s'exprime l'intensité lumineuse I' dans une zone comportant un détail ?
3. Calculer le contraste de l'image du détail par rapport au fond, le contraste étant défini par $C = \frac{|I' - I|}{I}$. Montrer que $C = K\Delta\varphi$ où la constante K dépend de m et de φ
4. L'épaisseur de la préparation e est choisie de manière à ce que $\varphi = \pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour les mêmes valeurs de $r = 0,9$ et m obtenues plus haut et sachant que l'œil humain décèle un contraste minimal de 0,1, le détail est-il visible ?
5. En s'inspirant de la fin de la partie I, proposer une valeur de φ permettant d'obtenir un fort contraste. Quelle est alors l'épaisseur minimale ϵ' décelable ?