

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et de calcul

Question 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k$.

Question 2. Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y'' - 2y' + 4y = 0$.

Question 3. Rappeler la définition d'une famille libre.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4.a. Rappeler la définition de la trace d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.b. Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la somme des carrés des coefficients de S vaut $\text{tr}(S^2)$.

Question 5. Soit un entier $n \geq 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que le rang de M vaut 1.

5.a. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ telles que $M = CL$.

5.b. Vérifier que $LC = \text{tr}(M)$.

5.c. En déduire un polynôme annulateur de M de degré 2.

Problème — suite de Fibonacci

La *suite de Fibonacci* est la suite réelle $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On considère les nombres $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ainsi que le polynôme $P = X^2 - X - 1$.

Partie 1 — calculs préliminaires

Question 6. Calculer F_n pour tout $n \in \llbracket -5, 10 \rrbracket$.

Question 7. Vérifier que φ et ψ sont les racines du polynôme P .

Question 8. En déduire une expression de F_n en fonction de φ, ψ et n , valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 9. Trouver un équivalent simple de F_n quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que F_n est l'entier le plus proche de $\varphi^n / \sqrt{5}$.

Partie 2 — suites de type Fibonacci

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . Dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de type Fibonacci signifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Question 11. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de type Fibonacci telles que $(u_0, u_1) = (v_0, v_1)$. Montrer que ces deux suites sont égales.

Question 12. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de type Fibonacci. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $u_n = u_0 F_{n-1} + u_1 F_n$.

Cette formule sera appelée la *règle Fibo* dans la suite de ce problème.

Question 13. Vérifier que la suite $((-1)^n F_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de type Fibonacci et en déduire une expression de F_{-n} en fonction de F_n .

Question 14. En déduire que la relation de la question 8 est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Question 15. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Vérifier que la suite $(F_{k+n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de type Fibonacci.

Que donne la règle Fibo appliquée à cette suite ?

Question 16. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en déduire une simplification des expressions $F_{k-1}F_k + F_kF_{k+1}$ et $(F_k)^2 + (F_{k+1})^2$.

Question 17. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

17.a. Vérifier que P est un polynôme annulateur de la matrice A .

17.b. En déduire que la suite de matrices $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de type Fibonacci.

17.c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire les coefficients de la matrice A^n .

17.d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une simplification de $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$.

17.e. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

Indication. On trouvera une simplification des sommes partielles.

Question 18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}$.

On rappelle que le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est nul lorsque $a < b$.

18.a. Calculer S_0 et S_1 .

18.b. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de type Fibonacci.

18.c. En déduire une expression de S_n .

Partie 3 — calculs de sommes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les sommes

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k^2, \quad e_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k-1}F_{k+1}, \quad f_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k F_{k-1}.$$

On rappelle que par convention, ces sommes sont nulles dans le cas $n = 0$.

Dans cette partie, « obtenir une expression » du terme général d'une suite signifie que l'on attend une expression en fonction d'un ou deux termes de la suite de Fibonacci.

Question 19. Vérifier que la suite $(a_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de type Fibonacci.

Question 20. En déduire une expression de a_n .

Question 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier les égalités $b_n + c_n = a_{2n}$ et $b_n + c_n = b_{n+1}$.

Question 22. En déduire des expressions de b_n et de c_n .

Question 23. En remarquant que $F_k^2 = F_k(F_{k+1} - F_{k-1})$, trouver une expression simple de d_n .

Question 24. En déduire une expression de e_n . On pourra exploiter les résultats des questions 1 et 17.d.

Question 25. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que

$$f_{2p} = F_{2p-2}F_{2p} \quad \text{et} \quad f_{2p+1} = F_{2p}^2.$$

Partie 4 — matrices de Fibonacci

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la matrice $M_n = (F_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On prendra soin de remarquer que les indices de lignes et de colonnes sont numérotés à partir de 0, comme en Python, et non à partir de 1 comme on le fait habituellement.

Les colonnes de la matrice M_n sont notées $C_{n,0}, C_{n,1}, \dots, C_{n,n-1}$ de la gauche vers la droite.

On rappelle que l'image de la matrice M_n est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de M_n .

Question 26. Justifier que la suite finie $(C_{n,0}, C_{n,1}, \dots, C_{n,n-1})$ est de type Fibonacci.

Question 27. Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, en déduire une expression de $C_{n,j}$ comme combinaison linéaire de $C_{n,0}$ et $C_{n,1}$.

Question 28. Justifier que la famille $\mathcal{B}_n = (C_{n,0}, C_{n,1})$ est une base de $\text{Im}(M_n)$. Quel est le rang de la matrice M_n ?

On note φ_n l'endomorphisme de $\text{Im}(M_n)$ défini par $U \mapsto M_n \times U$.

On note enfin Q_n la matrice de φ_n relativement à la base $\mathcal{B}_n$.

Question 29. Montrer que $Q_n = \begin{pmatrix} f_n & e_n \\ d_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$.

Question 30. Écrire explicitement les matrices Q_4 et Q_5 .

Supplément pour les gens qui auraient tout fini

Question 31. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $P(n)$ est un élément de $\mathbb{Z}$.

Prouver que les coefficients de P sont rationnels.

Indication. Lagrange.