

PC* 27 - DEVOIR N° 2

corrigé

Autofocus

Corrigé

1. La relation de Descartes

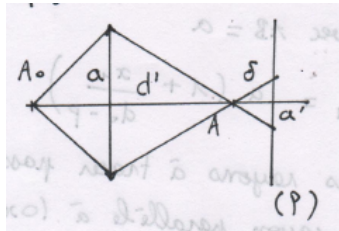
$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{x_0} = \frac{1}{f'} \quad \text{donne} \quad d' = \frac{f'_0 x_0}{f'_0 + x_0} \quad \boxed{d' = 10,5 \text{ cm}} .$$

Puis en utilisant le grandissement on trouve

$$h' = h \left| \frac{d'}{x_0} \right| \quad \boxed{h' = 0,53 \text{ cm}}$$

2. La situation est celle de la figure de l'énoncé. Le théorème de Thalès donne :

$$a' = a \frac{\delta}{d'} \quad \boxed{a' = 2,4 \text{ mm}} .$$



3. Chaque pixel possède une aire :

$$s = \frac{20 \times 30}{6 \cdot 10^6} = 10^{-4} \text{ mm}^2$$

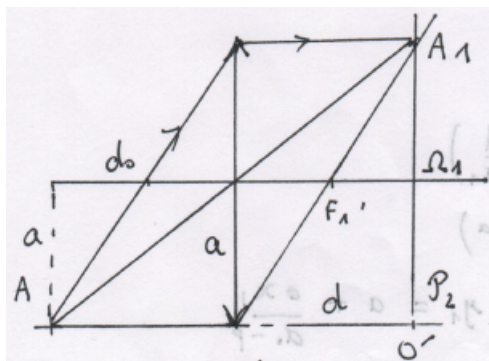
Comme $s = c^2$, chaque pixel a pour côté $c = 10^{-2} \text{ mm}$. L'image est nette si la tache se forme sur un seul pixel, c'est à dire si

$$2a' < c \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2a \frac{\delta}{d'} < c \quad \text{ou encore} \quad \delta < c \frac{d'}{2a} \quad \boxed{\delta < 105 \mu\text{m}} .$$

4. On utilise une nouvelle fois la relation de Descartes en prenant garde au fait que d_0 est une distance, pas une valeur algébrique, $\overline{OA_0} = -d_0$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f'} \quad \text{donc} \quad \boxed{d = \frac{f' d_0}{d_0 - f'}} .$$

5. Attention : ce dessin laisse penser que le rayon supérieur est horizontal, mais ce n'est pas le cas en général.



6. Le segment $O'A_1$ et celui de longueur a sont parallèles, ce qui permet d'appliquer le théorème de Thalès pour écrire

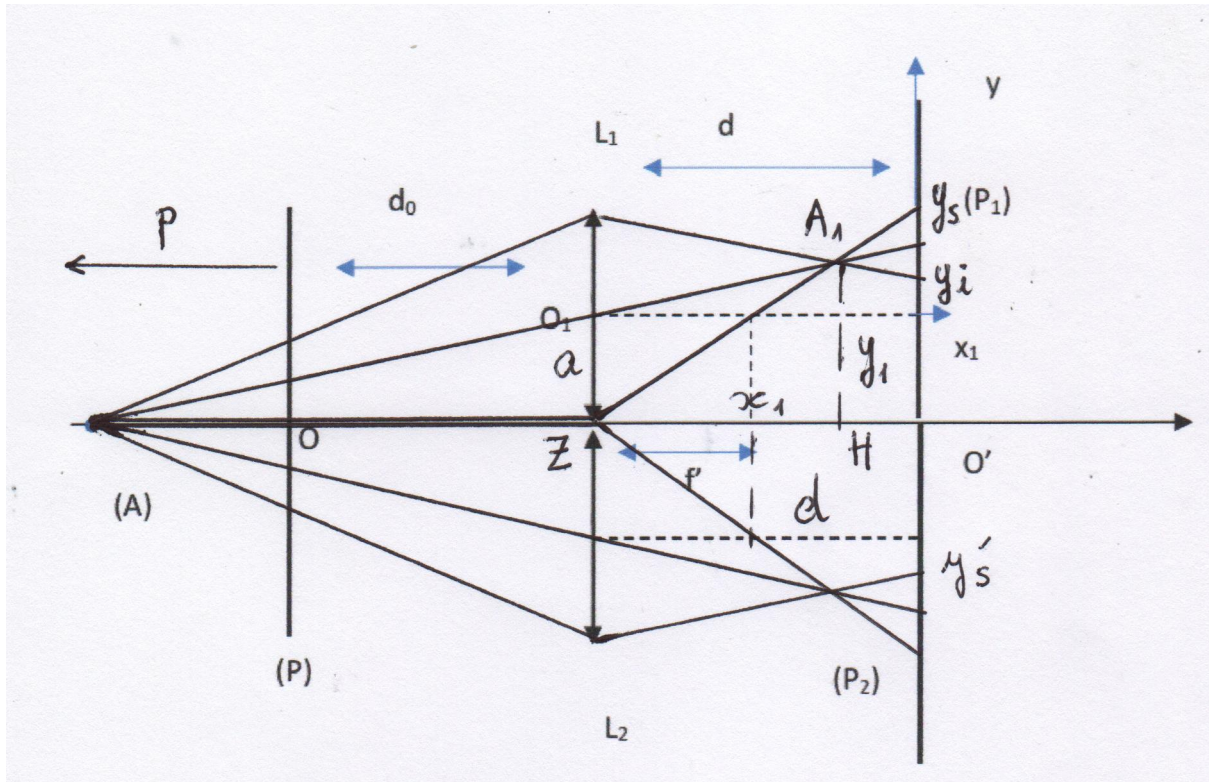
$$y_1 = O'A_1 = a \times \frac{d_0 + d}{d_0} \quad \boxed{y_1 = a \left(1 + \frac{d}{d_0}\right)}$$

Par symétrie, $y_2 = -y_1$.

7.

$$\boxed{\Delta\phi = 2y_1 = 2a \left(1 + \frac{d}{d_0}\right)}$$

8. Pour construire A_1 , on utilise le rayon passant par O_1 qui n'est pas dévié et le rayon parallèle à l'axe qui émerge par la foyer, à la distance f' sur l'axe optique de L_1 . L'intersection des deux rayons émergents définit A_1 .



On utilise le théorème de Thalès pour lier $ZO_1 = a$ et $HA_1 = y_1$. Comme $AZ = d_0 - p$ et $AH = d_0 - p + x_1$,

$$y_1 = a \times \frac{d_0 - p + x_1}{d_0 - p} \quad \boxed{y_1 = a \left(1 + \frac{x_1}{d_0 - p}\right)}$$

9. Les rayons à tracer passent par A_1 , image de A . Le rayon parallèle à (Ox) a déjà été tracé dans la question 8.

10. Par le théorème de Thalès, on a d'une part $y_s = y_1 \frac{d}{x_1}$, et la tache a pour diamètre :

$$y_s - y_i = 2a \times \frac{d - x_1}{x_1}$$

On en déduit

$$y_i = y_s + 2a \frac{x_1 - d}{x_1} \quad \boxed{y_i = \frac{dy_1}{x_1} + 2a \left(1 - \frac{d}{x_1}\right)}$$

11. Par symétrie, $y'_s = -y_i$ donc $\Delta\phi = y_s - y'_s = y_s + y_i$:

$$\Delta\phi = 2 \frac{dy_1}{x_1} + 2a \left(1 - \frac{d}{x_1}\right) \quad \Delta\phi = 2a + \frac{2d}{x_1}(y_1 - a)$$

D'après la question 8, $y_1 = a + \frac{ax_1}{d_0 - p}$, donc :

$$\Delta\phi = 2a + \frac{2d}{x_1} \times \frac{ax_1}{d_0 - p} \quad \boxed{\Delta\phi = 2a + \frac{2da}{d_0 - p}} .$$

Pour $p = 0$ on retrouve le résultat de la question 7.

12. La valeur $\Delta\phi_0$ correspond à la situation où la mise au point est réalisée, c'est à dire $p = 0$ (question 7).

$$\Delta^2\phi = 2a + \frac{2da}{d_0 - p} - 2a \left(1 + \frac{d}{d_0}\right)$$

$$\Delta^2\phi = 2ad \left(\frac{1}{d_0 - p} - \frac{1}{d_0}\right) \quad \boxed{\Delta^2\phi = \frac{2adp}{d_0(d_0 - p)}} .$$

13. De l'expression précédente, on tire :

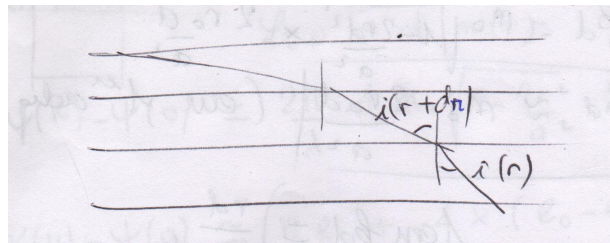
$$p = \frac{d_0 \Delta^2\phi}{2a + \Delta^2\phi} = 1,98 \text{ cm}$$

Contrairement au cas de la figure proposée par l'énoncé, p est positif : A est à droite de (P) . Il faut donc déplacer (P) vers la droite.

Lentille à gradient d'indice

Corrigé

1. En descendant, le rayon passer d'un milieu moins réfringent à un milieu plus réfringent. D'après la loi de Descartes, il se rapproche de la normale et s'incurve donc vers la bas. La courbe suivie est concave au sens mathématique.



2. D'après la loi de Descartes sur la réfraction, $n(r) \sin i(r) = n(r + dr) \sin i(r + dr)$. La fonction $r \mapsto n(r) \sin i(r)$ est donc constante. On peut l'évaluer au point où le rayon entre dans la lentille avec $n = n(r_0)$ et $i = \pi/2$, donc $n(r_0) \sin i(r_0) = n(r_0)$. On a donc

$$n(r) \sin i(r) = n(r_0) \quad .$$

3. En élevant au carré la relation de la question précédente, on obtient $n(r)^2 \sin^2 i(r) = n(r_0)^2$. En utilisant l'expression fournie pour $\sin i$ et celle de $n(r)$, on obtient

$$n_0^2 \left(1 - \frac{2r^2}{a^2}\right) \frac{1}{1 + r'^2} = n(r_0)^2 \quad \text{ou encore} \quad n_0^2 \left(1 - \frac{2r^2}{a^2}\right) = n(r_0)^2 (1 + r'^2) \quad .$$

En dérivant cette expression par rapport à z , il vient

$$n_0^2 \left(-2 \frac{2rr'}{a^2}\right) = n(r_0)^2 \times 2r'r'' \quad .$$

On simplifie par r' (sur des intervalles où cette dérivée ne s'annule pas) et on obtient

$$r'' + \frac{n_0^2}{n(r_0)^2} \frac{2}{a^2} r = 0 \quad .$$

On remarque que

$$\frac{n_0^2}{n(r_0)^2} = \frac{n_0^2}{n_0^2(1 - 2r_0^2/a^2)} = \frac{1}{1 - 1r_0^2/a^2} \simeq 1 \quad \text{car} \quad r_0 \ll a \quad (\text{relire le début de l'énoncé}).$$

D'où finalement l'équation différentielle

$$r'' + \frac{2}{a^2}r = 0 \quad .$$

4. La solution générale de cette équation différentielle est

$$r(z) = A \cos \frac{\sqrt{2}z}{a} + B \sin \frac{\sqrt{2}z}{a} \quad .$$

À l'entrée dans la lentille, en $z = 0$, on a $r = r_0$ et, puisque le rayon est horizontal, la tangente à la courbe l'est aussi et $r'(0) = 0$. Ces conditions permettent de trouver A et B pour obtenir

$$r(z) = r_0 \cos \frac{\sqrt{2}z}{a} \quad .$$

5. Le rayon émerge de la lentille pour $z = d$. On calcule

$$r(d) = r_0 \cos \frac{\sqrt{2}d}{a} \quad \text{et} \quad r'(d) = -r_0 \frac{\sqrt{2}}{a} \sin \frac{\sqrt{2}d}{a}$$

Cette dérivée est la pente du rayon. On peut introduire l'angle α_d que forme le rayon avec l'horizontale, défini par $\tan \alpha_d = |r'(d)|$. Les conditions de Gauss sont respectées si cette pente est faible, c'est à dire si $d \ll a$. Dans ce cas,

$$\alpha_d \simeq \tan \alpha_d = |r'(d)| = r_0 \frac{\sqrt{2}}{a} \sin \frac{\sqrt{2}d}{a} \quad \boxed{\alpha_d \simeq 2 \frac{r_0 d}{a^2}} \quad .$$

6. La loi de Descartes donne

$$n(r_d) \sin \alpha_d = \sin \beta_d \quad .$$

En supposant les angles petits, $\sin \alpha_d \simeq \alpha_d$ et $\sin \beta_d \simeq \beta_d$. Cette relation devient

$$\beta_d \simeq n_0 \sqrt{1 - \frac{2r_d^2}{a^2}} \times 2 \frac{r_0 d}{a^2} \quad \text{et au premier ordre} \quad \boxed{\beta_d \simeq \frac{2n_0 r_0 d}{a^2}} \quad .$$

7. Une figure permet de voir que $\tan \beta_d = r_d/(z - d)$.

$$z - d = \frac{r_d}{\tan \beta_d} \simeq \frac{r_0 \cos \left(\frac{\sqrt{2}d}{a} \right)}{2n_0 r_0 d / a^2}$$

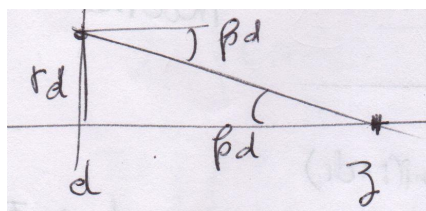
On peut transformer cette expression par un DL au second ordre du cosinus

$$z - d \simeq \frac{a^2}{2n_0 d} \left(1 - \frac{d^2}{a^2} \right) \quad z \simeq \frac{a^2}{2n_0 d} + d \left(1 - \frac{1}{2n_0} \right) \quad .$$

Comme $d \ll a$, le terme en d est négligeable

$$z \simeq \frac{a^2}{2n_0 d} \quad .$$

Dans ces approximations, z ne dépend pas de r_0 .



8. Tous les rayons horizontaux parviennent au même point : c'est le foyer principal image. La distance focale est z exprimée au dessus.

$$f' = \frac{a^2}{2n_0d} \quad .$$

9. Une lentille agit sur la phase de l'onde lumineuse et donc sur la forme des surfaces d'onde. Puisque les rayons lumineux sont liés à la forme de ces surfaces, ils changent de direction en traversant une lentille. Considérons plus spécifiquement une lentille convergente. Elle est plus épaisse au centre que sur les bords, donc les rayons passant près du centre subissent un retard par rapport à ceux qui en passent loin. Ici, la lentille possède un indice optique plus grand près de l'axe que près des bords : de manière analogue, les rayons qui passent près de l'axe sont plus ralentis, ils subissent un retard. Qualitativement, l'effet sur les surfaces d'onde est le même qu'avec une lentille convergente, et on peut donc s'attendre à un comportement analogue des rayons lumineux.

10. Les rayons incident forment une onde plane donc tout rayon possède, à l'entrée dans la lentille, la phase $\Psi(O)$. Le rayon traverse environ l'épaisseur d d'un milieu d'indice $n(r)$ et parcourt donc le chemin optique $n(r)d$.

$$\Psi(N) - \Psi(O) = \frac{2\pi}{\lambda} dn_0 \sqrt{1 - 2r^2/a^2} \quad \boxed{\Psi(N) - \Psi(O) \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \left(n_0d - n_0d \frac{r^2}{a^2} \right)} \quad .$$

11. Dans la lentille de verre traditionnelle, le rayon traverse l'épaisseur e dans le verre d'indice n et $(e - e_0)$ dans l'air, d'où

$$\Psi(N) - \Psi(O) = \frac{2\pi}{\lambda} (ne + (e_0 - e)) \quad \boxed{\Psi(N) - \Psi(O) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(ne_0 - (n - 1) \frac{r^2}{2R} \right)} \quad .$$

12. Puisque les variations de la phase sont analogues dans les deux cas, les deux systèmes présentent le même comportement optique. Le terme constant ne joue pas de rôle, et on peut identifier les coefficients devant r^2 : $(n - 1)/(2R)$ est remplacé par n_0d/a^2 . On en déduit que la focale de la lentille à gradient d'indice est

$$f' = \frac{a^2}{2n_0d} \quad .$$

On retrouve bien le résultat établi plus haut par l'analyse des rayons lumineux.