

PC* 27 - DEVOIR N° 3

corrigé

Mesure de l'épaisseur d'une lame

Corrigé

1. Nous avons vu en cours le raisonnement utilisant le principe du retour inverse et les plans d'ondes pour démontrer que la différence de marche entre le rayon passant par F_1 et celui passant par le centre C de la lentille est la valeur algébrique $\overline{CH}$ où H est le projeté orthogonal de F_1 sur le rayon venant de C . Après quelques calculs à fournir sur la copie on trouve

$$\delta = \frac{az}{f'} \quad \text{puis} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi az}{\lambda f'} \quad .$$

2. Les deux rayons sont cohérents et présentent la même intensité lumineuse. On peut donc appliquer la formule de Fresnel sous la forme

$$E = 2E_0(1 + \cos 2\varphi) = 4E_0 \cos^2 \varphi \quad .$$

Le graphe fait apparaître une sinusoïde variant entre 0 et $4E_0$ avec une période égale à π .

3. a) Il faut maintenant tenir compte du rayon d'amplitude s_0 cohérent avec les deux autres. Le scalaire optique est donné par

$$\underline{s} = s_0 + s_0 e^{j\varphi} + s_0 e^{-j\varphi} = s_0(1 + 2 \cos \varphi) \quad .$$

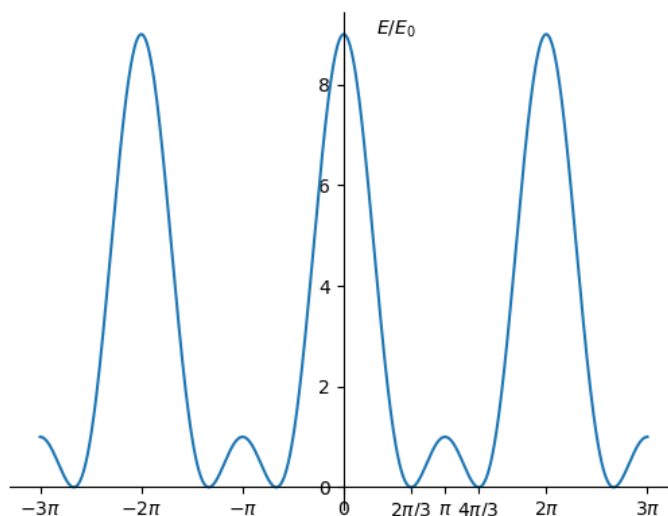
On en déduit l'éclairement

$$E = \frac{1}{2} \underline{s} \underline{s}^* = E_0(1 + 2 \cos \varphi)^2 = E_0(3 + 2 \cos 2\varphi + 4 \cos \varphi) \quad .$$

b)

φ	0	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	2π
E/E_0	9	0	1	0	9

- c) La fonction $E(\varphi)$ est 2π -périodique et je l'ai tracée sur un peu plus de deux périodes. Sur l'écran, on voit des franges équidistances rectilignes, mais les franges brillantes ne sont pas identiques : des franges très lumineuses alternent avec d'autres qui le sont moins.



4. a) Dans ce problème, les avances sont associées à des déphasages positifs. En effet, l'énoncé a choisi le déphasage $+\varphi$ pour le rayon passant par F_1 qui a moins de chemin à parcourir jusqu'à M . Le

retard de phase de $\pi/2$ s'exprime en disant que l'onde passant par F_0 et qui arrive sur l'écran est $s_0 e^{-j\pi/2} = -j$. Le scalaire optique obtenu par superposition des trois ondes cohérentes est donc

$$\underline{s} = s_0 e^{j\varphi} + s_0 e^{-j\varphi} - j s_0 = s_0 (2 \cos \varphi - j) \quad .$$

L'éclairement est donné par

$$E = \frac{1}{2} \underline{s} \underline{s}^* = E_0 (4 \cos^2 \varphi + 1) = E_0 (3 + 2 \cos 2\varphi) \quad .$$

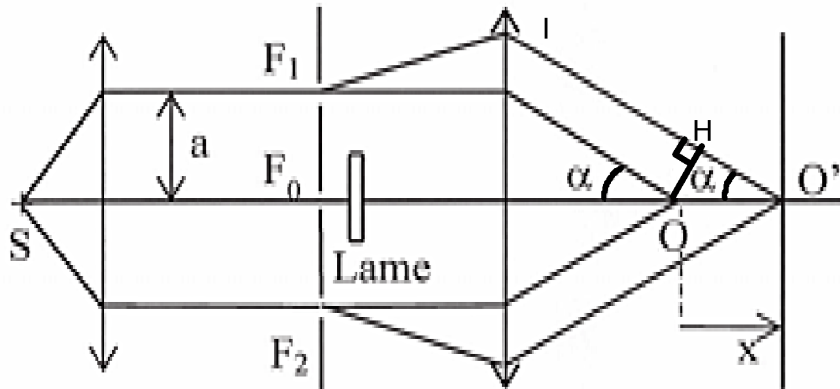
La dernière expression a été obtenue en linéarisant $\cos^2 \varphi$. Elle montre que l'éclairement varie sinusoidalement avec φ , donc avec z . On retrouve donc sur l'écran une alternance régulière de franges lumineuses et de franges sombres, avec le même interfrange puis on a à nouveau le terme $\cos 2\varphi$. Les franges lumineuses sont obtenus lorsque $\cos 2\varphi = 1$ c'est à dire lorsque $2\varphi = 2q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$, et ont l'éclairement $E = 5E_0$. Les franges sombres sont obtenues lorsque $\cos 2\varphi = -1$, c'est à dire lorsque $2\varphi = (2q+1)\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$, et ont l'éclairement $E = E_0$. Les franges brillantes et sombres ont respectivement pour abscisses

$$z_q = q \frac{\lambda f'}{2a} \quad z'_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda f'}{2a} \quad \text{avec l'interfrange} \quad i = \frac{\lambda f'}{2a} \quad .$$

- b) La différence de marche introduite par la lame est $\delta_L = (n-1)e$. On obtient un déphasage de $\pi/2$ si

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n-1)e = \frac{\pi}{2} \quad \lambda = 4(n-1)e = 0,6 \mu\text{m} \quad .$$

5. a) Sur la figure, on voit que les deux rayons issus de F_1 émergent de la seconde lentille parallèlement l'un à l'autre ce qui signifie que la lentille forme de F_1 une image à l'infini. Il en est de même pour F_2 . Donc le plan des fentes est confondu avec le plan focal objet de la seconde lentille.
- b) L'ancienne différence de marche est $\delta = \mathcal{L}_{F_0 O} - \mathcal{L}_{F_1 O}$ alors que la nouvelle est $\delta' = \mathcal{L}_{F_0 O'} - \mathcal{L}_{F_1 I H O'}$. Exprimons les chemins optiques de la nouvelle situation à partir de ceux de l'ancienne situation.



$$\mathcal{L}_{F_0 O'} = \mathcal{L}_{F_0 O} + x \quad \mathcal{L}_{F_1 I H O'} = \mathcal{L}_{F_1 I H} + H O' = \mathcal{L}_{F_1 I H} + x \cos \alpha$$

Comme O et H sont sur un même plan d'onde pour la lumière venant de F_1 , $\mathcal{L}_{F_1 I H} = \mathcal{L}_{F_1 O}$. Donc

$$\delta' = \mathcal{L}_{F_0 O} + x - (\mathcal{L}_{F_1 O} + x \cos \alpha) \quad \boxed{\delta' = \delta + x(1 - \cos \alpha)} \quad .$$

- c) On retrouve la même figure d'interférence qu'en l'absence de lame si $\delta' = 0$. En se rappelant que $\delta = (n-1)e$, on en déduit

$$x = \frac{(n-1)e}{\cos \alpha - 1} \quad .$$

Cette valeur est négative, ce qui signifie que l'écran doit être déplacé vers la gauche contrairement à ce que la figure de l'énoncé montre, mais en accord avec l'application numérique qui suit.

d)

$$e = \frac{(\cos \alpha - 1)x}{(n - 1)} \quad \boxed{e \simeq -\frac{\alpha^2 x}{2(n - 1)}}$$

Dans le triangle rectangle passant par O , on a $\tan \alpha = a/f'$ donc $\alpha \simeq a/f'$.

$$e = -\frac{\left(\frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{0,1}\right)^2 \times (-0,01)}{2 \times (1 - 0,5)} \text{ m} \quad e = 10 \text{ nm} \quad .$$

Contraste interférentiel

Corrigé

I. Observation en absence de détails

1. Comme le rayon $k + 1$ effectue un aller-retour en plus dans la lame d'épaisseur e et d'indice n ,

$$\varphi = \phi_{k+1} - \phi_k = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2ne$$

2. Le rayon émergent subit, avant d'émerger, deux réflexions supplémentaires :

$$\frac{A_{k+1}}{A_k} = r^2$$

3. Le premier rayon subit deux transmissions donc $A_1 = t^2 A_0$. Puis, en appliquant le résultat de la question précédente,

$$A_1 = t^2 A_0 \quad A_2 = r^2 A_1 \quad A_3 = r^4 A_1 \quad A_k = r^{2(k-1)} A_1 = r^{2(k-1)} t^2 A_0 \quad .$$

4. Nous notons $\underline{A}_k$ l'amplitude complexe du rayon de rang k . D'après la première question, les phases forment une suite arithmétique et donc $\phi_k = \varphi_1 + (k - 1)\varphi$. En reprenant l'amplitude de la question précédente, on a donc

$$\underline{A}_k = r^{2(k-1)} A_1 e^{-j[\phi_1 + (k-1)\varphi]} \quad .$$

L'onde émergent est la superposition cohérente de toutes ces ondes :

$$\begin{cases} \underline{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{A}_k = A_1 e^{-j\phi_1} (1 + r^2 e^{-j\varphi} + r^4 e^{-2j\varphi} + \dots) \\ \underline{A} = A_1 e^{-j\varphi_1} \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} e^{-jk\varphi} \end{cases}$$

5. Le module de la somme est majoré par la somme des modules, c'est à dire par $1 + r^2 + r^4 + \dots$. Cette valeur est atteinte si $e^{-j\varphi} = 1$ et constitue donc un maximum. C'est le cas lorsque

$$\exists q \in \mathbb{N}, \varphi = 2q\pi \quad .$$

Cela signifie que toutes les ondes sont en interférences constructives.

6. On peut calculer numériquement la somme de quelques centaines de termes pour obtenir les courbes. C'est un peu idiot parce que la somme infinie possède une expression simplifiée comme on va le voir dans la question suivante. Avec ces tracés, on se rend compte que plus r est élevé, et plus les pics en $\phi = 2q\pi$ sont fins, ce qui permet d'identifier les courbes a, b et c.

Courbe	a	b	c
r	0.7	0.8	0.9

7. Il suffit de sommer la série géométrique :

$$\begin{aligned} \underline{A} &= A_1 e^{-j\phi_1} \frac{1}{1 - r^2 e^{j\varphi}} \\ I &= \frac{1}{2} \underline{A} \underline{A}^* = \frac{1}{2} A_1 A_1^* \frac{1}{1 - r^2 e^{j\varphi}} \frac{1}{1 - r^2 e^{-j\varphi}} \\ &= \frac{1}{2} A_0^2 \frac{1}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \varphi} \end{aligned}$$

On note $I_0 = A_0^2/2$ l'intensité incidente. Comme $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2(\varphi/2)$,

$$\begin{aligned} I &= I_0 (1 - r^2)^2 \frac{1}{1 + r^4 - 2r^2 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \\ &= I_0 \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^4 + 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \\ \boxed{I} &= I_0 \frac{1}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

8. $m = 90$

9. La valeur maximale de l'intensité est $I_{\max} = I_0$.

$$I = \frac{I_0}{2} \quad \text{si} \quad m \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \quad \frac{\varphi}{2} = q\pi \pm \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right)$$

$$\varphi = 2p\pi \pm 2 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right) \quad \boxed{\varphi \approx 2p\pi \pm \frac{2}{\sqrt{m}}}$$

La largeur $\Delta_{1/2} \varphi$ à mi-hauteur des pics est l'intervalle entre les deux vagues pour p donné :

$$\boxed{\Delta_{1/2} \varphi = \frac{4}{\sqrt{m}} = \frac{2(1 - r^2)}{r}} \quad .$$

10. Lorsque r est très proche de 1, cette largeur est très petite et l'intensité tombe très vite lorsque φ s'écarte d'un multiple de 2π . Pour une valeur quelconque de e , φ ne sera généralement pas proche de $2p\pi$, donc l'intensité sera très petite. En général, la préparation apparaît sombre.

II. Observation en présence de détails

1. La différence de marche entre deux rayons successifs est

$$\delta' = 2(e - \varepsilon)n + 2n'\varepsilon = 2n\varepsilon + 2(n' - n)\varepsilon$$

$$\text{d'où le déphasage} \quad \varphi' = \varphi + \frac{4\pi}{\lambda}(n' - n)\varepsilon \quad \boxed{\Delta\varphi = \frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}(n' - n)\varepsilon} \quad \Delta\varphi = 0,069 \text{ rad}$$

2. Il suffit de remplacer φ par φ' dans le résultat de la première partie.

$$\boxed{I' = \frac{I_0}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi'}{2}}}$$

3. Comme $\Delta\varphi$ est petit, on calcule ΔI par développement limité au premier ordre :

$$\Delta I = I(\varphi + \Delta\varphi) - I(\varphi) \approx \frac{dI}{d\varphi} \Delta\varphi$$

$$\Delta I \approx \frac{-I_0 \cdot m \times 2 \sin \frac{\varphi}{2}}{(1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2})^2} \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \Delta\varphi$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{-m \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2})} \Delta \varphi$$

On peut atteindre le même résultat en utilisant une différentielle logarithmique. On obtient $C = K \Delta \varphi$ avec

$$K = \frac{|m \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}|}{1 + m \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad .$$

4.

$$K = \frac{m \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{m}{2}} = \frac{m}{2 + m} \quad \boxed{C = 0,067}$$

Comme $C < 0,1$, le détails est invisible, sa luminosité I' diffère insuffisamment de celle du fond de l'image.

5. Il s'agit de choisir une valeur de φ près de laquelle la pente du graphe de $I(\varphi)$ est très élevée, de sorte que la petite variation $\Delta \varphi$ du déphasage provoque une importante variation d'intensité. Sur les courbes, on voit qu'une pente très élevée est obtenue de part et d'autre de chaque pic. Il est donc judicieux de choisir $\varphi = 2p\pi \pm \frac{2}{\sqrt{m}}$, valeurs qui définissent la largeur des pics. En ces points, $\sin \varphi/2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{m}}$ et $\cos \varphi/2 = 1 - 1/m \simeq 1$. On obtient alors

$$K = \frac{m \times \frac{1}{\sqrt{m}}}{1 + \frac{m}{m}} = \frac{\sqrt{m}}{2} \quad .$$

On peut aussi calculer la dérivée seconde de la fonction $\varphi \mapsto I(\varphi)$ et chercher quelles valeur de φ l'annule pour maximiser la dérivée première. Mathématiquement, on cherche des points d'inflexion. On aboutit au même résultat (si m est assez grand).

Numériquement, avec les valeurs de la question précédente, $K = 4,7$ et $C = 0,33 > 0,1$: de détail devient visible.

L'épaisseur minimale décelable est définie par

$$K \Delta \varphi_{\min} = C_{\min} \quad \text{c'est à dire} \quad K \frac{4\pi(n' - n)}{\lambda} \epsilon_{\min} = C_{\min} \quad \boxed{\epsilon_{\min} = \frac{\lambda C_{\min}}{4\pi K(n' - n)} = 0,18 \mu\text{m}} \quad .$$