

Exercice 1. (*) Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.

Prouver l'égalité $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

Exercice 2. ()** On considère un espace euclidien E non trivial, dont on note n la dimension. On se donne un entier p et des vecteurs $v_1, \dots, v_p$ de E.

On suppose que pour tout couple (i, j) d'indices distincts entre 1 et p , le nombre $(v_i | v_j)$ est strictement négatif.

a. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. On pose

$$x = \sum_{i=1}^p x_i v_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^p |x_i| v_i.$$

Prouver l'inégalité $\|x\| \geq \|y\|$.

b. Dans le cas où x est nul, montrer que les x_i sont tous nuls ou tous non nuls.

c. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_{p-1})$ est libre. Qu'en déduit-on ?

d. (***) Construire (par récurrence) une famille $(v_1, \dots, v_{n+1})$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions du préambule.

Exercice 3. ()** Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$.

a. Justifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.

b. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Que vaut $(X^i | X^j)$?

d. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

e. En déduire le minimum sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (a, b) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 4. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Prouver que F est stable par A si, et seulement si, son orthogonal est stable par A^T .

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

Exercice 5. ()** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E.

On se donne une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et on note A la matrice représentative de u dans cette base.

On appelle *adjoint* de u tout endomorphisme v de E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x) | y) = (x | v(y)).$$

a. Dans cette question, on suppose que u possède un adjoint v . Déterminer la matrice représentative de v dans la base $\mathcal{E}$.

b. Montrer que u possède exactement un adjoint.

Exercice 6. (*) On note P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1, 1, 1, 0)$ et $v = (1, 1, 0, 1)$. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.

Déterminer la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal sur P. Même question pour la symétrie orthogonale d'axe P.

Exercice 7. (*) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + 2z = 0$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Idem pour la symétrie orthogonale d'axe P.

Exercice 8. (*) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(X_1, \dots, X_p)$ une base orthonormée de F .

Démontrer que la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur F s'écrit $\sum_{k=1}^p X_k \cdot X_k^T$.

Exercice 9. (*) Une *réflexion* d'un espace euclidien E est une symétrie orthogonale relativement à un *hyperplan*, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de E dont la dimension vaut $\dim(E) - 1$.

a. Soit v un vecteur de E non nul. On note H_v l'hyperplan de E défini par $H_v = \text{Vect}(v)^\perp$ et on note s_v la réflexion relative à H_v .

Pour tout vecteur x de E , démontrer la relation

$$s_v(x) = x - 2 \frac{(v|x)}{(v|v)} v.$$

b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^2$, on note D_θ la droite dirigée par le vecteur $u(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et on note s_θ la réflexion relative à cette droite.

Déterminer la matrice canoniquement associée à s_θ .

c. ()** On se donne deux vecteurs a et b de E distincts et non nuls tels que $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion de E qui envoie a sur b .

Exercice 10. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

a. Prouver l'égalité $\text{Ker}(M^T) = (\text{Im}(M))^\perp$.

Qu'obtient-on dans le cas d'une matrice symétrique ou antisymétrique ?

b. Prouver l'égalité $\text{Ker}(M^T \cdot M) = \text{Ker}(M)$.

c. Prouver l'égalité $\text{rg}(M^T \cdot M) = \text{rg}(M)$.

d. Dans cette question et la suivante, on ajoute la condition $2 \leq p < n$. On pose $B = M^T \cdot M$ et on suppose que M est de rang p .

Montrer alors que B est inversible. Montrer ensuite que la matrice $M \cdot B^{-1} \cdot M^T$ (notée P) est une matrice de projection orthogonale. Vérifier l'égalité $\text{Im}(P) = \text{Im}(M)$.

Exercice 11. ()** **Matrice de Gram** Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E . On lui associe sa *matrice de Gram*, qui est la matrice

$$G(x_1, \dots, x_p) = ((x_i|x_j))_{1 \leq i, j \leq p}$$

de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a. On note n la dimension de E . Trouver une matrice M de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $M^T \cdot M = G(x_1, \dots, x_p)$.

b. En déduire que la matrice $G(x_1, \dots, x_p)$ est inversible si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Exercice 12. ()** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A^2 soit nulle.

a. Prouver l'égalité $\text{Ker}(A + A^T) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(A^T)$.

b. Montrer que l'inversibilité de $A + A^T$ équivaut à l'égalité $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$.

Exercice 13. ()** Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E . Montrer que les deux énoncés ci-dessous sont équivalents.

(i) $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$.

(ii) $\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.