

Problème 1 — Polynômes de Laguerre

Dans cet exercice, on étudie une famille de polynômes orthogonale pour un certain produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on introduit les fonctions

$$\begin{aligned} h_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & L_n &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{t^n}{n!} e^{-t} & & & t &\mapsto h_n^{(n)}(t) \times e^t. \end{aligned} \quad (1)$$

Question 1. Pour tout entier n , montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \quad (2)$$

existe et qu'elle vaut $n!$.

Question 2. En déduire que pour tout polynôme réel P , la fonction

$$t \mapsto P(t) e^{-t} \quad (3)$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt. \quad (4)$$

Question 3. Montrer que la fonction $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule de Leibniz, obtenir une expression de la fonction L_n . En déduire que cette fonction est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on note encore L_n le polynôme dont L_n est la fonction associée.

Question 5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a. Écrire le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n . En déduire que pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, le nombre $h_n^{(k)}(0)$ est nul.

b. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout entier p compris entre 0 et n , prouver l'égalité

$$(L_n|P) = (-1)^p \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(t) P^{(p)}(t) dt. \quad (5)$$

c. En déduire que la famille $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire introduit plus haut.

Question 6. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. À l'aide du polynôme L_n , exprimer le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En déduire la valeur de

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} \left(t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right)^2 e^{-t} dt ; (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (6)$$

Exercice 1. ()** Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et surjective. Montrer que f a une infinité de zéros.

Problème 2

Dans ce problème, on étudie la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

On définit sur $[1, +\infty[$ la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = g(n), \quad v_n = \int_n^{n+1} g(x) \, dx, \quad w_n = v_n - \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

Question 7. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles. Prouver l'égalité

$$\int_a^b f(t) \, dt = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \frac{1}{2} \int_a^b (b-x)(x-a)f''(x) \, dx.$$

Question 8. En déduire une expression de w_n sous la forme d'une intégrale et prouver que la série de terme général w_n converge absolument.

Question 9. Prouver que la suite $(\cos(n))_{n \geq 1}$ n'a pas de limite.

Question 10. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer explicitement $\sum_{k=1}^n v_k$ et en déduire que la série de terme général v_n est divergente.

Question 11. Déterminer la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 2. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est de rang 2.

- a. Montrer l'existence de $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = AB$.
- b. On pose $C = BA$. Donner un polynôme annulateur de C de degré 2.
- c. En déduire un polynôme annulateur de M de degré 3.
- d. (**) Trouver un polynôme annulateur de degré 3 pour la matrice M_n du devoir surveillé n° 1.

Exercice 3. ()** Soient n et N deux entiers tels que $1 < n < N$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On pioche dans cette urne n boules simultanément. On note X le plus grand numéro pioché et Y le plus petit. On pose $Z = X - Y$.

On modélise cette expérience par l'univers des possibles $\Omega = \mathcal{P}_n([1, N])$ (ensemble des parties de cardinal n de l'ensemble $[1, N]$), que l'on munit de la probabilité uniforme.

- a. Déterminer la loi de X .
- b. Calculer l'espérance de X .
- c. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- d. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[Z = j]$.

Exercice 4. On peut compléter ceci en piochant parmi les exercices que nous n'aurons pas eu le temps de corriger en classe.