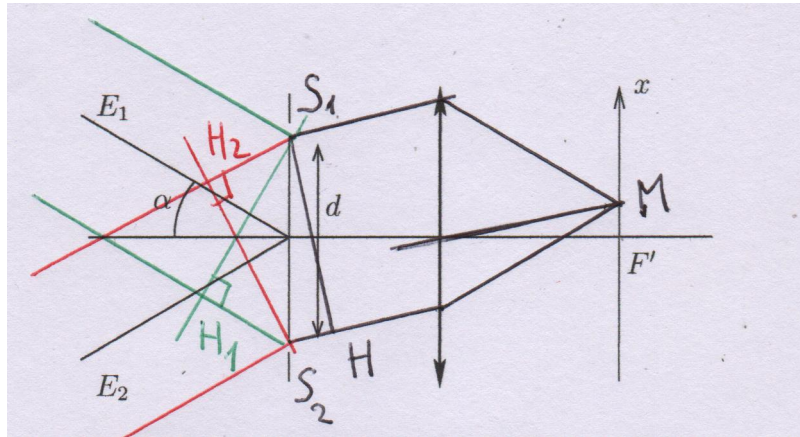


Corrigé : cohérence et contraste

1. Corrigé : Principe de l'interférométrie stellaire

1. Attention : les étoiles sont à l'infini et on ne peut pas représenter les rayons jusqu'en ces points. Pour une étoile donnée, on trace des rayons parallèles dans la direction de cette étoile. À droite des trous d'Young, les rayons venant de E_1 ou E_2 se confondent.



En M se rencontrent quatre rayons : deux issus de E_1 et deux issus de E_2 . Les deux rayons issus de E_1 sont mutuellement cohérents, de même que les deux issus de E_2 . Par contre, un rayon issu de E_1 n'est pas mutuellement cohérent avec un rayon issu de E_2 .

2. Considérons les deux rayons issus de E_1 . D'après le théorème de Malus, ils parcourent le même chemin jusqu'en S_1 et H_1 . Par le principe du retour inverse et le théorème de Malus, $\mathcal{L}_{S_1M} = \mathcal{L}_{H_1M}$. Donc leur différence de marche est

$$\delta_{E_1} = \mathcal{L}_{E_1S_2M} - \mathcal{L}_{E_1S_1M} = H_1S_2 + S_2H \quad .$$

Selon un raisonnement vu en cours, $S_2H = dx/f'$ et par ailleurs, $S_2H_1 = d \sin \alpha$, donc

$$\delta_{E_1} = \frac{dx}{f'} + d \sin \alpha \quad p_1 = \frac{\delta_{E_1}}{\lambda} = \frac{dx}{\lambda f'} + \frac{d \sin \alpha}{\lambda} \quad .$$

Pour les deux rayons issus de E_2 , la situation est analogue mais $\delta_{E_2} = S_2H - H_2S_1 = S_2H - d \sin \alpha$, donc l'ordre d'interférences est donné par

$$p_2 = \frac{dx}{\lambda f'} - \frac{d \sin \alpha}{\lambda} \quad .$$

3. Chacune des deux étoiles, incohérente avec l'autre, produit dans le plan focal un système de franges. Ces systèmes de franges se superposent et peuvent donner lieu à une coïncidence ou une anti-coïncidence. En cas d'anti-coïncidence, les franges se brouillent. C'est le cas lorsque $p_1 - p_2 \in \mathbb{Z} + 1/2$, c'est à dire lorsque :

$$\exists q \in \mathbb{Z}, \quad \frac{2d \sin \alpha}{\lambda} = q + \frac{1}{2} \quad .$$

On obtient ainsi une suite de valeurs de d produisant des brouillages :

$$d_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad .$$

4.

$$\Delta = d_{q+1} - d_q = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad \alpha = \arcsin \left(\frac{\lambda}{2\Delta} \right) = 1.10^{-5} \text{ rad} = 5,7.10^{-4}^\circ \quad .$$

5. Si chacune des étoiles était seule, on pourrait appliquer la formule de Fresnel

$$I_{E_1}(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta_{E_1}}{\lambda} \right) \right] \quad I_{E_2}(M) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta_{E_2}}{\lambda} \right) \right] \quad .$$

6. Comme les deux étoiles sont des sources incohérentes, les intensités lumineuses qu'elles produisent séparément s'additionnent.

$$\begin{aligned} I(M) &= I_{E_1}(M) + I_{E_2}(M) = 2I_0 \left[2 + \cos\left(\frac{2\pi\delta_{E_1}}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta_{E_2}}{\lambda}\right) \right] \\ I(M) &= 4I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi(\delta_{E_2} - \delta_{E_1})}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\pi(\delta_{E_2} + \delta_{E_1})}{\lambda}\right) \right] \\ I(M) &= 4I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi d \sin \alpha}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi dx}{\lambda f'}\right) \right] \quad \boxed{\gamma = \cos\left(\frac{2\pi d \sin \alpha}{\lambda}\right)} \quad . \end{aligned}$$

7. D'un point à l'autre dans le plan focal, l'intensité varie avec x parce que le second facteur en cosinus ondule entre -1 et +1.

$$I_{\max} = 4I_0(1 + |\gamma|) \quad I_{\min} = 4I_0(1 - |\gamma|) \quad C = |\gamma| \quad .$$

Le brouillage des franges intervient si $C = 0$, c'est à dire si $\gamma = 0$, ce qui conduit à

$$\frac{2\pi d \sin \alpha}{\lambda} = \left(q + \frac{1}{2}\right) \pi \quad d_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad .$$

On retrouve le même résultat qu'à la question 3.

1. Comme la répartition de la lumière est uniforme sur la largeur de la source, l'intensité est proportionnelle à la longueur dx_S de la portion de source considérée

$$dI_0 = \frac{I_0 dx_S}{b} \quad .$$

2. Dans ce cas, la source recevrait deux rayons cohérents émis par une même source ponctuelle et on pourrait appliquer la formule de Fresnel. Pour le point d'abscisse x_S , la différence de marche est selon un calcul usuel

$$\delta(M) = \frac{\ell x}{D} + \frac{\ell x_S}{D_S}$$

et donc

$$dI(M) = 2dI_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\ell x}{D} + \frac{\ell x_S}{D_S}\right)\right) \right] \quad \text{avec} \quad \ell = S_1 S_2 \quad .$$

3. Des rayons émis par des points distincts sont mutuellement incohérents et n'interfèrent pas. L'intensité en un point M de l'écran est donc la somme des intensités que produiraient séparément chacun des points de la source.

$$I(M) = \int dI(M) = \int_{-b/2}^{b/2} 2 \frac{dI_0}{b} dx_S \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\ell x}{D} + \frac{\ell x_S}{D_S}\right)\right) \right] \quad .$$

4. Le calcul de l'intégrale ci-dessous, suivi de la transformation d'une différence de sinus en un produit, conduit à la forme proposée avec

$$A = 2I_0 \quad \gamma = \frac{\lambda D_S}{\pi \ell b} \sin\left(\frac{\pi \ell b}{\lambda D_S}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\pi \ell b}{\lambda D_S}\right) \quad .$$

On a utilisé la fonction sinc (sinus-cardinal) définie par

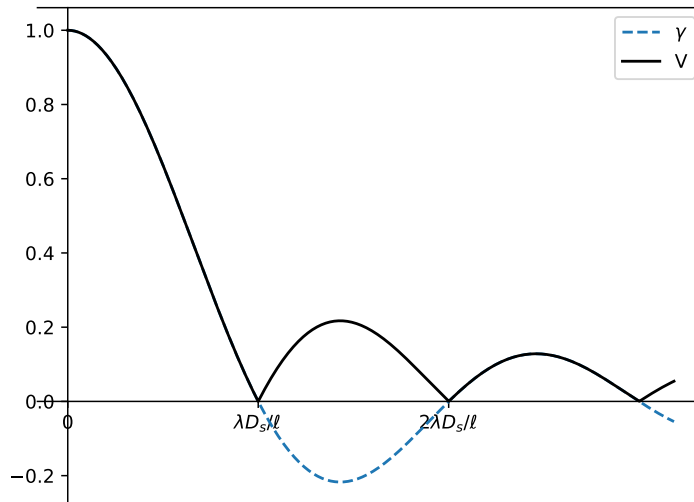
$$\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u} \quad \text{pour } u \neq 0 \text{ et prolongée par continuité en } 0 \text{ par } \text{sinc}(0) = 1 \quad .$$

- 5.

$$I_{\max} = 2I_0(1 + |\gamma|) \quad I_{\min} = 2I_0(1 - |\gamma|) \quad V = |\gamma| \quad .$$

6. La fonction sinus-cardinal présente des oscillations amorties et il est de même pour γ en fonction de b . Pour $b \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$ et $V \rightarrow 1$. Cela signifie que pour une ouverture très fine, on obtient un très bon contraste. Dans ce cas, l'expression de l'intensité redonne d'ailleurs la formule de Fresnel. La première annulation du contraste correspond à celle de $\sin(u)$ et se rencontre lorsque

$$\frac{\pi \ell b}{\lambda D_S} = \pi \quad b = \frac{\lambda D_S}{\ell} \quad .$$



2. Source à profil spectral rectangulaire

1. On est dans les conditions d'application de la formule de Fresnel :

$$I(M) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi\sigma\delta(M))]$$

où I_0 est l'intensité produite par un seul des deux rayons.

2. En M donné sur l'écran, les ordres d'interférence extrêmes sont

$$p_{\min} = \delta(M)(\sigma_0 - \Delta\sigma/2) \quad p_{\max} = \delta(M)(\sigma_0 + \Delta\sigma/2) \quad .$$

La plus grande différence d'ordre est donc

$$\Delta p_{\max} - p_{\min} = \delta(M)\Delta\sigma \quad .$$

Le contraste reste acceptable tant que $\Delta p_{\max} \lesssim 1/2$ c'est à dire

$$\delta(M) \lesssim \frac{1}{2\Delta\sigma} \quad .$$

3. L'énoncé nous indique qu'une bande infinitésimale peut être traitée comme une source monochromatique, ce qui permet d'appliquer la formule de Fresnel avec l'intensité dI_0 .

$$dI(M) = 2dI_0 [1 + \cos(2\pi\sigma\delta(M))] \quad .$$

4. On sait que des longueurs d'ondes distinctes l'interfèrent pas entre elles, donc des rayonnements de bandes spectrales disjointes n'interfèrent pas et leurs intensités s'additionnent. En tenant compte de toutes les bandes spectrales infinitésimales constituant le spectre, on obtient donc

$$I(M) = \int_0^\infty 2I_{0\sigma}(\sigma) [1 + \cos(2\pi\sigma\delta(M))] \quad .$$

5. Dans le cas envisagé,

$$I(M) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} 2I_{0\sigma} [1 + \cos(2\pi\sigma\delta(M))] \quad .$$

Le calcul de cette intégrale, suivi de la transformation d'une différence de sinus en produit, conduit à l'expression demandée avec

$$I_0 = I_{0\sigma}\Delta\sigma \quad \text{et} \quad F = \text{sinc}(\pi\Delta\sigma\delta(M)) \quad .$$

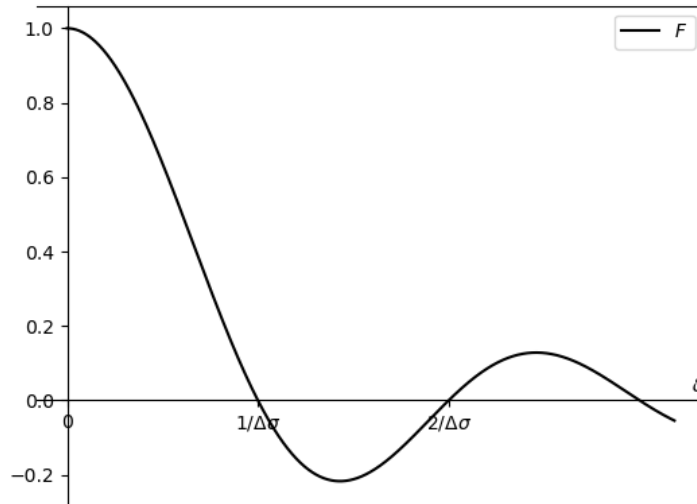
On a utilisé la fonction sinc (sinus-cardinal) définie par

$$\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u} \quad \text{pour } u \neq 0 \text{ et prolongée par continuité en } 0 \text{ par } \text{sinc}(0) = 1 \quad .$$

6. La fonction F s'annule, hors de l'origine, chaque fois que $\sin(\pi\Delta\sigma\delta) = 0$, c'est à dire pour

$$\delta = \frac{n}{\Delta\sigma} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad .$$

La fonction $\delta \mapsto F(\delta)$ fait donc intervenir la longueur caractéristique $1/\Delta\sigma$ qui s'apparente à une pseudo-demi-période.



7. Le facteur cosinus dans l'expression de I présente, vis-à-vis de la variable δ , la période $1/\sigma_0 = \lambda_0$: cela correspond au fait que chaque fois que la différence de marche augmente de λ_0 , on passe d'une frange à la suivante. Comme $\sigma_0 \gg \Delta\sigma$, cette période est bien plus courte que la longueur sur laquelle la fonction F varie significativement. Autour d'une valeur donnée de δ , on peut parcourir une ou deux franges en traitant F comme une constante. Près d'une frange particulière, le cosinus prend les valeurs extrêmes 1 et -1 donc

$$I_{\max} = 2I_0(1 + |F|) \quad I_{\min} = 2I_0(1 - |F|) \quad C = |F| \quad .$$

8. On voit sur le graphe que F descend rapidement quand δ s'éloigne de 0. On peut considérer que le contraste reste acceptable tant que δ reste suffisamment à gauche de la première abscisse d'annulation $1/\Delta\sigma$, disons tant que

$$\delta \lesssim \frac{1}{2\Delta\sigma} \quad .$$

On retrouve ainsi le résultat établi plus haut en raisonnant sur $\Delta p_{\max}$.

9. Sur la courbe, on voit bien les variations rapides de l'intensité associée aux franges lumineuses et sombres, enveloppées dans des variations plus lentes associées à la fonction F . Je compte 30 franges entre $\delta = 0$ et $\delta_1 = 18 \mu\text{m}$, donc

$$\frac{\delta_1}{\lambda_0} = 30 \quad \lambda_0 = \frac{\delta_1}{30} = 0,6 \mu\text{m} \quad .$$

La première annulation se produit pour $\delta = \delta_1$ donc

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\delta_1} = 0,055 \mu\text{m}^{-1} \quad .$$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1\sigma_2} \simeq \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0^2} = \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{\delta_1}{30} \right)^2 = \frac{\delta_1}{30^2} \quad \boxed{\Delta\lambda = 20 \mu\text{nm}} \quad .$$