

PC* — mathématiques
Devoir surveillé n° 2 — piste bleue

jeudi 1^{er} octobre 2026
durée : 4 heures

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et de calcul

Question 1. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/4} \ln(n)^5}$.

Question 2. Pour tout $\alpha > 0$, justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ est convergente.

Question 3. Rappeler ce qu'est une matrice de Vandermonde et donner sans démonstration la valeur de son déterminant.

Problème 1

Partie 1

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Question 4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} n^p z^n$ converge absolument.

On pose alors $S_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^p z^n$.

Question 5. Rappeler la valeur de $S_0(z)$.

Question 6. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(1-z)S_p(z) = \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p}{\ell} (-1)^{p-\ell+1} S_\ell(z) + (-1)^p$.

Question 7. En déduire que $S_1(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ et $S_2(z) = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$.

Question 8. Dans cette question, la lettre x désigne une variable réelle.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que $(1-x)^{p+1} S_p(x)$ tend vers $p!$ quand x tend vers 1.

On raisonnera par récurrence.

Partie 2

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{2^n}$.

Question 9. Montrer que la fonction $(\cdot | \cdot)$ est bien définie.

Question 10. Montrer que la fonction $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Question 11. Calculer $(1|1)$, $(1|X)$ et $(X|X)$.

Question 12. Trouver toutes les valeurs de λ pour lesquelles la famille $(1, X - \lambda)$ est orthogonale.

Question 13. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Problème 2 — intégrale de Gauss

Le but de ce problème est de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, dont la convergence a été obtenue à la question 2.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$. On admet que W_n est équivalent à $\sqrt{\pi/(2n)}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 14. Pour tout x dans $] -1, +\infty[$, prouver l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

Question 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout t dans $[0, \sqrt{n}]$, prouver l'encadrement

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Question 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

Question 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}/\tan(u)$, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t) dt.$$

Question 18. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Problème 3 — une inégalité de Poincaré

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) ; (f(0), f(1)) = (0, 0)\}$.

On définit la fonction *cotangente* sur l'intervalle $]0, \pi[$ par

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Question 19. Justifier que la fonction $\cotan$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée.

Question 20. Trouver un équivalent de $\cotan(x)$ quand x tend vers 0.

Question 21. Simplifier $\cotan(\pi - t)$ et en déduire que $\cotan(x)$ est équivalent à $1/(x - \pi)$ quand x tend vers π .

Question 22. Soit $f \in E$. Justifier que la fonction $x \mapsto f(x) \cotan(\pi x)$ admet des limites finies en 0 et en 1.

Question 23. Soit $f \in E$. Justifier que les fonctions $x \mapsto f(x)f'(x) \cotan(\pi x)$ et $x \mapsto (f'(x) - \pi f(x) \cotan(\pi x))^2$ sont intégrables sur $]0, 1[$.

Pour toute fonction f de E , on pose alors

$$I(f) = \int_0^1 f(x)f'(x) \cotan(\pi x) dx \quad \text{et} \quad J(f) = \int_0^1 (f'(x) - \pi f(x) \cotan(\pi x))^2 dx.$$

Question 24. Montrer l'égalité $2I(f) = \pi \int_0^1 f(x)^2 (1 + \cotan^2(\pi x)) dx$.

Question 25. En développant l'expression de $J(f)$, démontrer l'inégalité suivante, attribuée à Henri Poincaré

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'(x)^2 dx.$$

Question 26. Déterminer les fonctions $f \in E$ pour lesquelles cette inégalité est une égalité.