

PC* — mathématiques
Devoir surveillé n° 2 — piste rouge

jeudi 1^{er} octobre 2026
durée : 4 heures

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et de calcul

Question 1. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{3/4} \ln(n)^5}$.

Question 2. Pour tout $\alpha > 0$, justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ est convergente.

Question 3. Rappeler ce qu'est une matrice de Vandermonde et donner sans démonstration la valeur de son déterminant.

Problème 1 — intégrale de Gauss

Le but de ce problème est de calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, dont la convergence a été obtenue à la question 2.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$. On admet que W_n est équivalent à $\sqrt{\pi/(2n)}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 4. Pour tout x dans $] -1, +\infty[$, prouver l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

Question 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout t dans $[0, \sqrt{n}]$, prouver l'encadrement

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

Question 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} W_{2n+1}.$$

Question 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}/\tan(u)$, prouver l'égalité

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(t) dt.$$

Question 8. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ puis de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Question 9. Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto u - 1/u$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa réciproque.

Question 10. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2 - u^{-2}} du$ converge.

Question 11. À l'aide du changement de variable $u = \varphi^{-1}(t)$, calculer sa valeur.

Problème 2 — méthode de Laplace

Le but de ce problème est de trouver un équivalent quand t tend vers $+\infty$ de

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e}{u}\right)^{tu} du.$$

Pour cela, on introduit notamment la fonction $h : u \mapsto -u + u \ln(u)$, définie sur $]0, +\infty[$.

De plus, on pose

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

Question 12. Pour tout $t > 0$, montrer que l'intégrale $I(t)$ existe.

Question 13. Étudier les variations de la fonction h . On justifiera notamment que cette fonction atteint un minimum strict en 1.

Question 14. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction h au voisinage de 1.

Question 15. On fixe r dans $]0, 1/2[$.

15.a. Montrer qu'il existe α dans $]0, 1[$ vérifiant l'encadrement

$$\forall s \in [-\alpha, \alpha], \quad -1 + \frac{1-r}{2}s^2 \leq h(1+s) \leq -1 + \frac{1+r}{2}s^2.$$

On fixe un tel α pour la suite.

15.b. Pour tout $t > 0$, en déduire l'encadrement

$$\frac{e^t}{\sqrt{t}\sqrt{\frac{1+r}{2}}} \int_{-\alpha t/\sqrt{\frac{1+r}{2}}}^{\alpha t/\sqrt{\frac{1+r}{2}}} e^{-v^2} dv \leq \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \left(\frac{e}{u}\right)^{tu} du \leq \frac{e^t \lambda}{\sqrt{t}\sqrt{\frac{1-r}{2}}}.$$

15.c. Montrer l'existence de $t_1 > 0$ vérifiant la propriété

$$\forall t \geq t_1, \quad \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \left(\frac{e}{u}\right)^{tu} du \geq \frac{e^t \lambda}{\sqrt{t}\sqrt{\frac{1}{2} + r}}.$$

15.d. Pour tout u dans l'intervalle $[1 + \alpha, +\infty[$, montrer la minoration

$$h(u) \geq h(1 + \alpha) + \ln(1 + \alpha)(u - (1 + \alpha))$$

et en déduire la majoration $\int_{1+\alpha}^{+\infty} \left(\frac{e}{u}\right)^{tu} du \leq \frac{e^{-th(1+\alpha)}}{t \ln(1 + \alpha)}$.

15.e. Pour tout $t > 0$, montrer la majoration

$$\int_0^{1-\alpha} \left(\frac{e}{u}\right)^{tu} du \leq (1 - \alpha)e^{-th(1-\alpha)}.$$

15.f. Montrer l'existence de $t_2 > 0$ vérifiant la propriété

$$\forall t \geq t_2, \quad I(t) \leq \frac{e^t \lambda}{\sqrt{t}\sqrt{\frac{1}{2} - r}}.$$

Question 16. Obtenir finalement un équivalent de $I(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Problème 3 — une inégalité de Poincaré

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) ; (f(0), f(1)) = (0, 0)\}$.

On définit la fonction *cotangente* sur l'intervalle $]0, \pi[$ par

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Question 17. Justifier que la fonction $\cotan$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et calculer sa dérivée.

Question 18. Trouver un équivalent de $\cotan(x)$ quand x tend vers 0.

Question 19. Simplifier $\cotan(\pi - t)$ et en déduire que $\cotan(x)$ est équivalent à $1/(x - \pi)$ quand x tend vers π .

Question 20. Soit $f \in E$. Justifier que la fonction $x \mapsto f(x) \cotan(\pi x)$ admet des limites finies en 0 et en 1.

Question 21. Soit $f \in E$. Justifier que les fonctions $x \mapsto f(x)f'(x) \cotan(\pi x)$ et $x \mapsto (f'(x) - \pi f(x) \cotan(\pi x))^2$ sont intégrables sur $]0, 1[$.

Pour toute fonction f de E , on pose alors

$$I(f) = \int_0^1 f(x)f'(x) \cotan(\pi x) \, dx \quad \text{et} \quad J(f) = \int_0^1 (f'(x) - \pi f(x) \cotan(\pi x))^2 \, dx.$$

Question 22. Montrer l'égalité $2I(f) = \pi \int_0^1 f(x)^2 (1 + \cotan^2(\pi x)) \, dx$.

Question 23. En développant l'expression de $J(f)$, démontrer l'inégalité suivante, attribuée à Henri Poincaré

$$\int_0^1 f(x)^2 \, dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'(x)^2 \, dx.$$

Question 24. Déterminer les fonctions $f \in E$ pour lesquelles cette inégalité est une égalité.
