

PC* 27 - DEVOIR N° 5

corrigé

Tomographie par cohérence optique

1. On observe des anneaux d'égale inclinaison localisés à l'infini. Pour les observer, on place l'écran au plan focal image d'une lentille convergente.

2. Se reporter au cours. À partir d'un rayon donné issu de la source, on obtient deux rayons cohérents qui émergent de l'interféromètre parallèlement l'un à l'autre. Pour trouver leur point de rencontre sur l'écran, on détermine un foyer secondaire en traçant la parallèle à ces rayons passant pas le centre de la lentille.

3. On sait que dans cette situation, $\delta = 2e \cos i$ où $e = |z - z_0|$ et où i est l'angle d'incidence des rayons sur les miroirs (à faire apparaître sur le schéma de la question précédente), identique à l'angle que forment les rayons émergents avec l'axe optique de la lentille. L'angle i est lié à r par $\tan i = r/f'$. En pratique, $i \simeq r/f'$ et $\delta \simeq 2e(1 - r^2/(2f'^2))$.

4. La figure d'interférence est formée de cercles de centre F' appelés anneaux d'égale inclinaison. L'ordre au centre est $p_0 = 2e/\lambda$. Comme ce point présente une intensité maximale, p_0 est un entier. Le premier anneau brillant entourant le centre a pour ordre $p_0 - 1$.

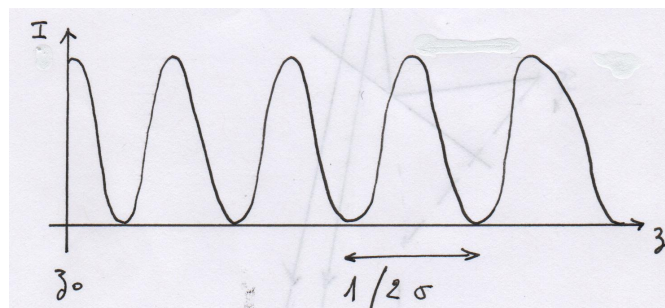
$$\frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i_1^2}{2}\right) = p_0 - 1 = \frac{2e}{\lambda} - 1 \quad \text{donne} \quad i_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{e}} \quad r_1 = f' \sqrt{\frac{\lambda}{e}}$$

5. Cette position se nomme contact optique. Sur l'écran, on observe une teinte plate, c'est à dire qu'il est uniformément éclairé.

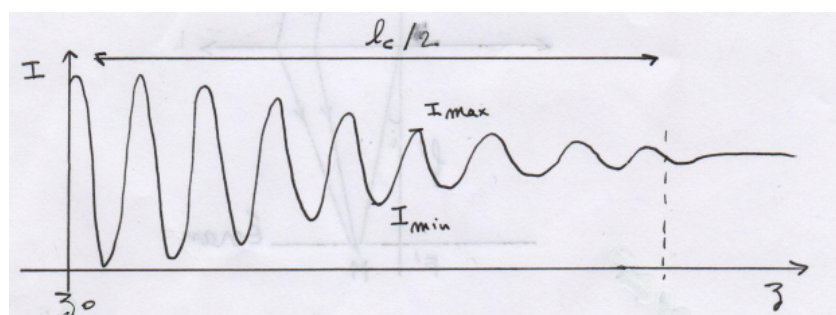
6. En F' , $r = 0$ et $\delta = 2e = 2(z - z_0)$. Deux rayons cohérents de même intensité interfèrent donc on peut appliquer la formule de Fresnel sous la forme

$$I = 2I_0[1 + \cos 4\pi\sigma(z - z_0)]$$

En traçant le graphe des variations de I en fonction de z , il importe de faire apparaître la période $1/(2\sigma)$.



7. La longueur de cohérence est définie par $\ell_c = c\tau_c$ où τ_c est le temps de cohérence de la source, c'est à dire la durée pendant laquelle la phase de l'onde lumineuse reste stable. Expérimentalement, ℓ_c est la différence de marche au-delà de laquelle on n'observe plus d'interférences. Le contraste est défini par $\mathcal{C} = (I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$. Ici, il convient de considérer un contraste local au voisinage d'une valeur donnée de δ . Lorsque δ augmente, le contraste diminue peu à peu jusqu'à la disparition des franges lorsque δ dépasse ℓ_c . Comme $\delta = 2|z - z_0|$, cela se produit lorsque $|z - z_0|$ dépasse $\ell_c/2$. L'expérience décrite montre que la longueur de cohérence est de l'ordre de quelques micromètres pour la lumière blanche, de quelques millimètres pour une lampe spectrale. Pour le laser, la longueur de cohérence est supérieure aux différences de marche rencontrées dans la manipulation.



8. Pour δ donné, on obtient tout un intervalle d'ordres d'interférences à cause de la variété des longueurs d'onde. Les ordres extrémaux sont $p_1 = \delta\sigma_1$ et $p_2 = \delta\sigma_2$. La limite de visibilité des franges est définie par $p_2 - p_1 \leq 1/2$, c'est à dire

$$\delta(\sigma_2 - \sigma_1) \leq 1/2 \quad \text{ou encore} \quad \delta \leq \frac{1}{2\Delta\sigma}.$$

On identifie donc $\ell_c = 1/(2\Delta\sigma)$ (en ordre de grandeur, on peut omettre le facteur 2).

9. Pour la lampe au mercure, $\ell_c = 5 \text{ mm}$ donc $\Delta\sigma = 2.10^2 \text{ m}^{-1}$. Pour la lumière blanche, $\ell_c = 5 \mu\text{m}$ donc $\Delta\sigma = 2.10^5 \text{ m}^{-1}$. Pour le laser, on ne peut pas connaître $\Delta\sigma$ avec la manipulation réalisée.

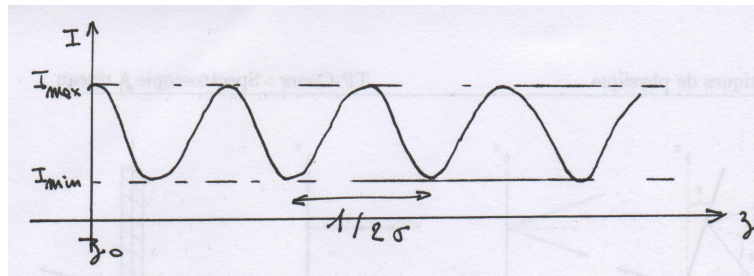
10. Quand le scalaire optique est multiplié par $\rho \in \mathbb{R}$, l'intensité lumineuse est multipliée par ρ^2 . On applique donc la formule de Fresnel avec $I_1 = I_0$ et $I_2 = \rho^2 I_0$.

$$I = I_0(1 + \rho^2 + 2\rho \cos(4\pi\sigma(z - z_0)))$$

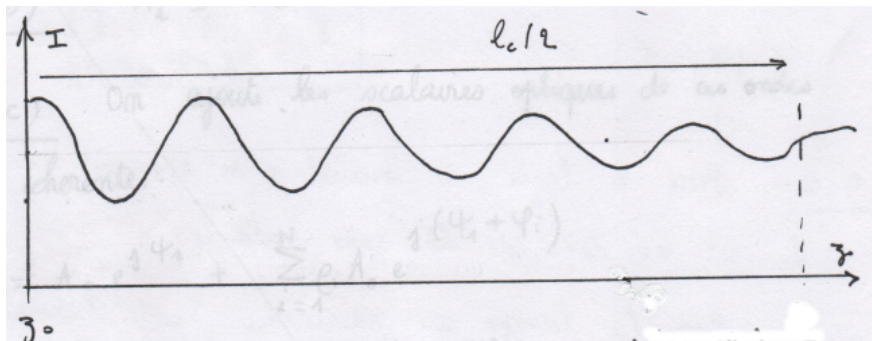
$$I_{\max} = I_0(1 + \rho^2 + 2\rho) = I_0(1 + \rho)^2 \quad I_{\min} = I_0(1 + \rho^2 - 2\rho) = I_0(1 - \rho)^2$$

$$\mathcal{C} = \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \leq 1.$$

Par rapport à B2, les maximums d'intensité sont plus faibles et les minimums plus hauts ; le contraste est moins bon.



11. On a ici un double effet. D'une part, le contraste n'est pas très bon parce que $\rho < 1$, et ce même pour les petites différences de marche. D'autre part, le contraste diminue peu à peu lorsqu'on s'approche de ℓ_c .



12. $\varphi_i = 4\pi\sigma(z_i - z)$.

13. L'onde réfléchiée par la surface de rang i présente le retard de phase φ_i par rapport à celle venant de M_1 , et a subi la réflexion avec le coefficient ρ_i .

$$A_i = \rho_i A_0 e^{j(\psi_1 + \varphi_i)}.$$

14. On somme les scalaires optiques de ces ondes cohérentes.

$$A = A_0 e^{j\psi_1} + \sum_{i=1}^N \rho_i A_0 e^{j(\psi_1 + \varphi_i)} = A_0 e^{j\psi_1} \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i e^{j\varphi_i} \right)$$

$$I = \frac{1}{2} A_0 A_0^* \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i e^{j\varphi_i} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^N \rho_k e^{-j\varphi_k} \right)$$

$$I = I_0 \left(1 + \sum_{i,k} \rho_i \rho_k e^{j(\varphi_i - \varphi_k)} + \sum_i \rho_i (e^{j\varphi_i} + e^{-j\varphi_i}) \right)$$

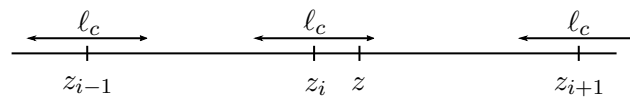
Les termes en $\rho_i \rho_k$ sont d'ordre 2, on les néglige pour obtenir

$$I(z) = I_0 \left(1 + 2 \sum_{i=1}^N \rho_i \cos \varphi_i \right) . \quad (1)$$

15. Les termes qu'on a négligés représentent les interférences entre les couples d'ondes venant des surfaces réfléchissantes. Les termes qu'on a conservés représentent les interférences entre les couples d'ondes dont une provient de M_1 et l'autre d'une surface réfléchissante.

16. L'onde réfléchiée par M_1 et celle réfléchiée à la cote z_i sont cohérentes si $2|z_i - z| < \ell_c$. Sinon, elles n'interfèrent pas et il faut supprimer le terme associé dans la somme (1). Dans cette somme, on ne doit prendre que compte que les indices i tels que $|z_i - z| < \ell_c/2$.

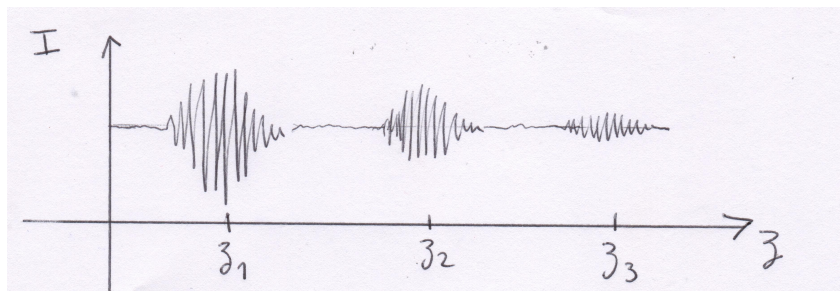
17. Dans la relation (1), le terme de rang i n'est à prendre en compte que z est suffisamment proche de z_i , c'est à dire si $z_i - \ell_c/2 < z < z_i + \ell_c/2$. Si $|z_{i+1} - z_i| > \ell_c$, cette relation est satisfaite pour au plus une valeur de i . Dès lors que z est « assez proche » de z_i , il est « trop loin » de z_{i+1} et de z_{i-1} .



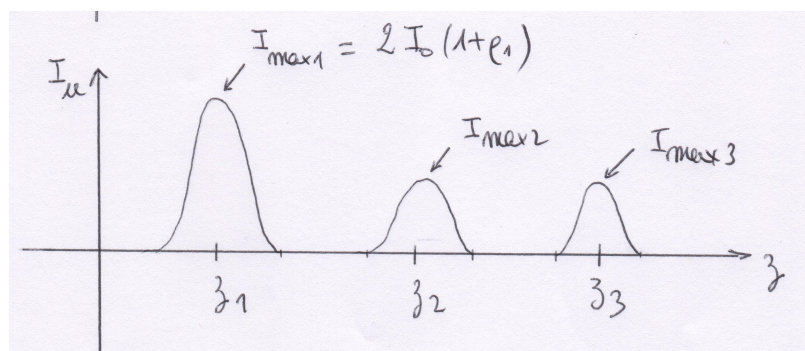
On le voit bien avec un dessin et on peut aussi le démontrer mathématiquement.

$$|z_{i+1} - z| = |z_{i+1} - z_i + z_i - z| \geq |z_{i+1} - z_i| - |z_i - z| \geq \ell_c - \ell_c/2 \geq \ell_c/2$$

L'onde envoyée par M_1 est cohérente avec au plus une des ondes issues des surfaces réfléchissantes. Quand z varie, il y a successivement interférence avec la première de ces ondes, puis avec la seconde, puis avec la troisième, etc, mais jamais avec deux ondes en même temps.



18. On soustrait au signal sa valeur moyenne et on en détecte l'enveloppe.



Pour relever les $\{z_i\}$, il suffit donc de repérer les valeurs de z pour lesquelles I_u présente un maximum, ce qui correspond aux positions pour lesquelles l'onde réfléchiée par M_1 est cohérente avec l'une de celles réfléchies par les miroirs. Cela explique le titre du problème : « tomographie par cohérence optique ». Pour obtenir ρ_i , on lit la valeur du maximum $2I_0\rho_i$. Si on connaît I_0 , on en déduit ρ_i .

19. On repère les z_i d'autant plus précisément que les maximums sur le graphe de I_u sont plus étroits, c'est à dire que ℓ_c est plus petit. Il convient donc de choisir la lumière blanche pour obtenir la meilleure résolution possible. De plus, plus ℓ_c est petit, plus facilement est satisfaite la condition $|z_{i+1} - z_i| > \ell_c$, ce qui permet d'étudier des surfaces proches. On améliore ainsi la résolution.

20. On a un maximum de signal utile lorsque le M_1 se trouve en $z = z_A$. Donc l'onde réfléchie par l'interface passant par A a, dans cette position, une différence de marche nulle avec celle réfléchie par M_1 . Autrement dit, pour $z = z_A = 0$, M'_1 est au contact optique avec la surface passant par A .

L'onde réfléchie par B parcourt en plus le chemin optique $2n_c D_c$ et, lorsque M_1 est à la cote z , l'onde réfléchie par M_1 parcourt en plus le chemin $2(z - z_A) = 2z$. La différence de marche cherchée est donc

$$\delta_B = 2n_c D_c - 2z \quad .$$

21. Le signal utile présente un maximum lorsque $z = z_B$, position dans laquelle il y a contact optique entre l'interface passant par B et M'_1 . Donc z_B est tel que $\delta_B = 0$, ce qui donne

$$z_B = n_c D_c \quad .$$

22. Chaque interface produit une réflexion et, lorsque M_1 se déplace, on obtient un maximum lorsque M'_1 est au contact optique avec l'une de ces interfaces. D'où les associations suivantes.

air	P_1	cornée	P_2	humeur aqueuse	P_3	cristallin	P_4	humeur vitrée	P_5	rétine	P_6
-----	-------	--------	-------	----------------	-------	------------	-------	---------------	-------	--------	-------

Par exemple, l'interface entre l'humeur aqueuse et le cristallin correspond à P_3 . Entre P_3 et P_4 on explore le cristallin.

23. Selon le même raisonnement que dans la question 21, le déplacement entre P_3 et P_4 correspond au chemin optique excédentaire associé à la traversée du cristallin : $z_{P_4} - z_{P_3} = n_{ct} LT$. De même, $z_{P_5} - z_{P_4} = n_v D_v$. On ne connaît pas les z_{P_i} , mais on peut, avec une règle, mesurer sur le graphique le rapports de distances.

$$\frac{z_{P_4} - z_{P_3}}{z_{P_5} - z_{P_4}} = \frac{2,8}{10,9} = 0,257 \quad .$$

Les deux longueurs dépendent de l'échelle de la photocopie, mais leur rapport n'est pas.

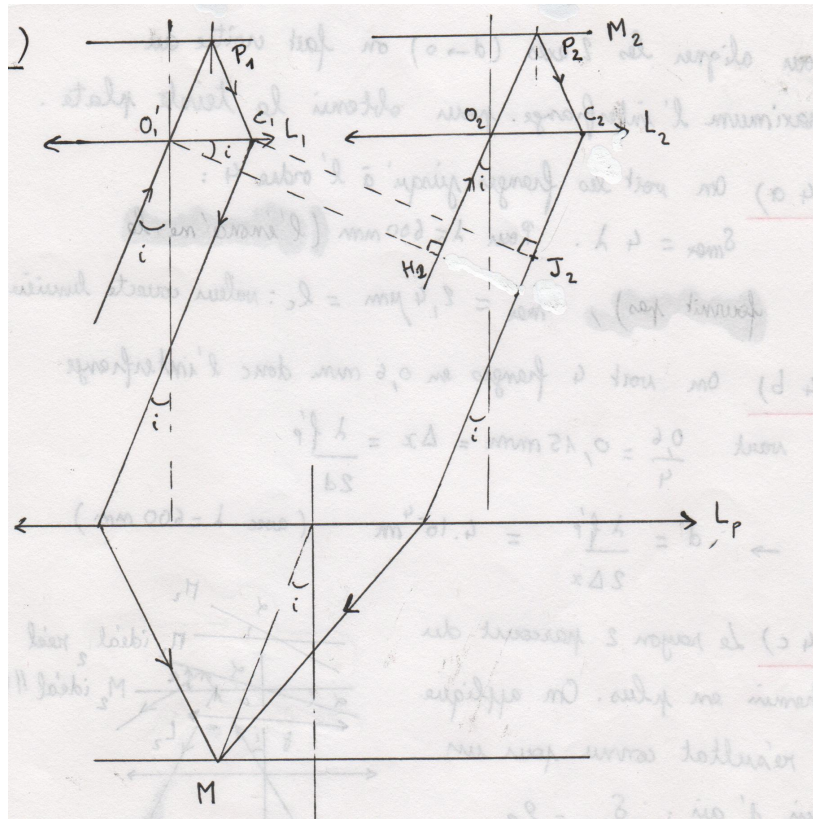
$$\frac{n_{cr} LT}{n_v D_v} = \frac{z_{P_4} - z_{P_3}}{z_{P_5} - z_{P_4}} \quad LT = \frac{z_{P_4} - z_{P_3}}{z_{P_5} - z_{P_4}} \frac{n_v D_v}{n_{cr}} = 0,257 \times \frac{1,344 \times 16,14}{1,406} \quad \boxed{LT = 3,96 \text{ mm}}$$

Ce résultat est en accord avec les proportions et les autres longueurs données sur les schémas de l'œil fournis en annexe.

24. Chacun des deux miroirs se trouve au plan focal d'une des lentilles L_1 et L_2 . Cette lentille en donne une image à l'infini et L_p permet la projection sur le capteur.

25. Les trajets étant identiques sur les deux voies, on devrait observer une teinte plate sur le capteur.

26. Au premier passage dans L_1 , P_1 joue le rôle de foyer secondaire image. Au second passage dans L_1 , P_1 joue le rôle de foyer secondaire objet ; après C_1 , le rayon est donc parallèle à $P_1 O_1$, c'est à dire parallèle au rayon incident. Le raisonnement est le même pour le rayon réfléchi par M_2 . Les deux rayons émergents sont donc parallèles l'un à l'autre ; ils forment avec l'axe optique le même angle i . Ils se rejoignent en M , foyer secondaire image de la lentille de projection L_p .



27. Le théorème de Malus énonce que les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde. Ici, O_1' et H_2 sont sur un même plan d'onde et vibrent en phase. Dans un retour inverse de la lumière, C_1 et J_2 seraient sur un même plan d'onde, ce qui prouve que $\mathcal{L}_{C_1M} = \mathcal{L}_{J_2M}$. Les deux lentilles étant identiques, on a $\mathcal{L}_{O_1P_1C_1} = \mathcal{L}_{O_2P_2C_2}$. La différence de marche entre les deux rayons est donc $\delta = H_2O_2 + C_2J_2 = d \sin i + d \sin i = 2d \sin i$. Comme $\sin i \simeq \tan i = x/f_P$, $\delta \simeq 2dx/f_P$. Les franges sont définies par $\delta = p\lambda$ donc $x_p = p\lambda f_P/(2d)$. On en déduit l'interfrange

$$\Delta x = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda f_P}{2d}.$$

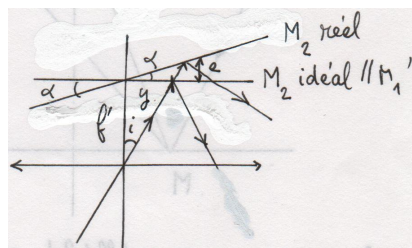
Aligner les deux axes signifie atteindre $d = 0$ donc un interfrange infini. En pratique, on fait croître au maximum l'interfrange jusqu'à atteindre une teinte plate.

28. On peut voir les franges jusqu'aux environs de l'ordre 4. En utilisant la longueur d'onde moyenne du spectre visible $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$, on en déduit la différence de marche maximale $\delta_{\text{max}} = 4\lambda = 2,4 \mu\text{m}$. La longueur de cohérence est donc $\ell_c = 2,4 \mu\text{m}$.

29. Sur une largeur de $0,6 \text{ mm}$, on voit 10 franges donc l'interfrange vaut $600/8 = 60 \mu\text{m}$.

$$d = \frac{\lambda f_P'}{2\Delta x} = 1 \text{ mm} \quad (\text{avec } \lambda = 600 \text{ nm}).$$

30. Si un défaut de parallélisme des miroirs subsiste, un effet de type « coin d'air » d'épaisseur locale e apparaît. La différence de marche supplémentaire est $\delta_{\text{sup}} = 2e = 2y \tan \alpha \simeq 2f'i \tan \alpha$.



Cette différence de marche supplémentaire apparaît si le contact optique préalable à l'introduction des objectifs a été mal réalisé. Elle est gênante car elle est du même type (proportionnelle à i) que la différence de marche $\delta(x)$ que l'on souhaite corriger ensuite. Elle risque donc d'entraîner une mauvaise interprétation des franges observées et de faire échouer l'alignement des axes selon le protocole décrit plus haut.