

DEVOIR N° 6

Le jeudi 8 octobre

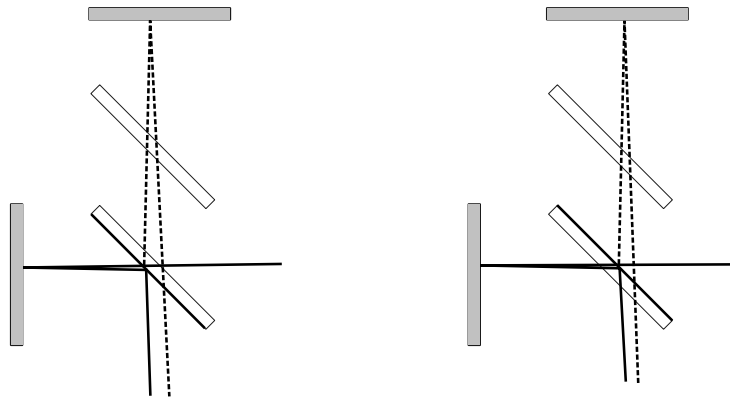
Mesures interférométriques de longueurs d'onde

Mines-Ponts MP 25, corrigé

9. La lame L_2 est la compensatrice et permet d'équilibrer les traversées de verre sur les deux voies. Pour qu'elle joue son rôle, il convient que les rayons réfléchis par le miroir fixe traversent le verre le même nombre de fois que ceux réfléchis par le miroir mobile.

- Avec la couche semi-réfléchissante se trouvant du côté gauche de L_1 (dessin de gauche), l'un des rayons traverserait une épaisseur de verre et l'autre cinq. Ce n'est pas ce qu'il faut.
- Avec la couche semi-réfléchissante du côté droit de L_1 (dessin de droite), les deux rayons traversent trois épaisseurs de verre, ce qui convient.

En conclusion, c'est la face droite de L_1 qui est semi-réfléchissante.



10. Dans cette configuration, le miroir fixe est parallèle à l'image du miroir mobile dans la séparatrice. On sait que les franges sont alors des anneaux d'égale inclinaison localisés à l'infini. L'oculaire réglé sur l'infini permet donc leur observation. Par contre, si on dérègle l'oculaire, il visera à distance finie et les franges seront brouillées, d'autant plus que la source sera plus étendue.

11. Soit e la distance optique entre les miroirs. La différence de marche au centre du champ de vision est $\delta = 2e$ et, si le miroir se déplace de Δz , elle augmente de $2\Delta z$. L'ordre augmente de $\Delta p = 2\Delta z/\lambda_0$. Cette variation s'identifie au nombre de franges qui défilent :

$$N = \frac{2\Delta z}{\lambda_0} .$$

12. Il s'agit ici de reproduire un schéma et une démonstration vus en cours. Le plus simple est d'introduire les images S_1 et S_2 d'un point de la source dans chacun des miroirs. En invoquant le principe du retour inverse et le théorème de Malus, on obtient facilement

$$\delta = 2e \cos \theta$$

où θ est l'inclinaison des rayons par rapport à l'axe optique de l'oculaire.

L'épaisseur e s'identifie au déplacement du miroir depuis le contact optique : $e = \Delta z_{\max}$. Au centre, $\theta = 0$ et l'ordre d'interférence est

$$p_0 = \frac{2\Delta z_{\max}}{\lambda_0} .$$

Selon la valeur de p_0 , ce centre est plus ou moins sombre ou lumineux. La première frange de même nature est telle que

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta z_{\max}}{\lambda_0} \cos \Delta\theta &= p_0 - 1 & \frac{2\Delta z_{\max}}{\lambda_0} \cos \Delta\theta &= \frac{2\Delta z_{\max}}{\lambda_0} - 1 \\ \frac{2\Delta z_{\max}}{\lambda_0} (1 - \cos \Delta\theta) &= 1 \end{aligned} .$$

En pratique, cet angle est petit, ce qui légitime l'approximation

$$(1 - \cos \Delta\theta) \simeq \frac{\Delta\theta^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \Delta\theta \simeq \sqrt{\frac{\lambda_0}{\Delta z_{\max}}} .$$

Dans approximation, on obtient

$$\Delta\theta = \arccos \left(1 - \frac{\lambda_0}{2\Delta z_{\max}} \right) .$$

13. La longueur d'onde est donnée par

$$\lambda_0 = \frac{2\Delta z}{N} = 655 \text{ nm}$$

et correspond à la couleur rouge. Il s'agit donc de la raie H_α . L'incertitude relative est

$$\frac{u(\lambda)}{\lambda} = \frac{u(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{2}{1035} = 1,9 \cdot 10^{-3} .$$

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\Delta z_{\max}}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \quad \Delta\theta = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 1,4^\circ .$$

Le premier anneau est très proche du centre, mais j'estime qu'on doit quand même pouvoir le distinguer, sans quoi on ne pourrait plus compter le défilement des franges.

14. Dans le cas d'une source monochromatique, on peut appliquer la formuler de Fresnel :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) .$$

Les intensités maximale et minimale sont obtenus pour $\cos \varphi_0 = 1$ et $\cos \varphi_0 = -1$ respectivement ; elles valent

$$I_{\max} = 4I_0 \quad \text{et} \quad I_{\min} = 0 .$$

Le contraste est donné par

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \boxed{C = 1} .$$

15. Comme deux longueurs d'onde distinctes n'interfèrent pas entre elles, l'intensité observée est la somme des intensités que produiraient seules chacune des deux longueur d'onde. Chacune est donnée comme dans la question précédente par la formule de Fresnel.

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right)$$

$$I = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \cos \left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right]$$

Comme les deux longueurs d'onde sont proches,

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \simeq \frac{2}{\lambda_0} \quad \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} .$$

$$I(\delta) \simeq 4I_0 \left(1 + \gamma \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \gamma = \cos \left(\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) .$$

La période de $\gamma(\delta)$ est $2\lambda_0^2/\Delta\lambda$ et celle de l'autre facteur cosinus est λ_0 et, comme $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, elle très inférieure à la première. Le second cosinus décrit donc une variation rapide de l'intensité et correspond au franges lumineuses ou sombres selon qu'il vaut 1 ou -1 (et selon le signe de γ).

$$I_{\max} = 4I_0(1 + |\gamma|) \quad I_{\min} = 4I_0(1 - |\gamma|) \quad \boxed{C = |\gamma|} .$$

Le contraste s'annule lorsque

$$\pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = q\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{N} .$$

En mesurant les valeurs de δ qui produisent un brouillage, on peut accéder à $\Delta\lambda$ connaissant λ_0 et q .

16. Lorsque les deux intensités diffèrent, il n'est plus aussi facile de factoriser l'intensité obtenue en additionnant les deux termes de type Fresnel. On analyse semi-quantitativement les brouillages à partir des ordres d'interférence

$$p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1} \quad p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2} \quad \Delta p = p_2 - p_1 \simeq \frac{\delta \Delta \lambda}{\lambda_0^2} .$$

Le contraste est minimal lorsqu'un des deux familles de frange sont en anti-coïncidence, c'est à dire lorsque

$$\exists q \in \mathbb{N}, \Delta p = q + \frac{1}{2} \quad \boxed{\delta_q = \frac{\lambda_0^2}{\Delta \lambda} \left(q + \frac{1}{2} \right)} .$$

Lorsque cela se produit, les franges lumineuses associées à λ_1 (d'intensité $4I_1$) sont superposées aux franges sombres associées à λ_2 (d'intensité nulle), et inversement. Comme $I_1 > I_2$, on a alors

$$I_{\max} = 4I_1 \quad I_{\min} = 4I_2 \quad \boxed{C = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}} .$$

Le premier brouillage se produit pour $q = 0$, dans la position telle que

$$\Delta z = \frac{\delta_0}{2} = \frac{\lambda_0^2}{4\Delta\lambda} \quad \boxed{\Delta z = 7,7 \text{ mm}} .$$

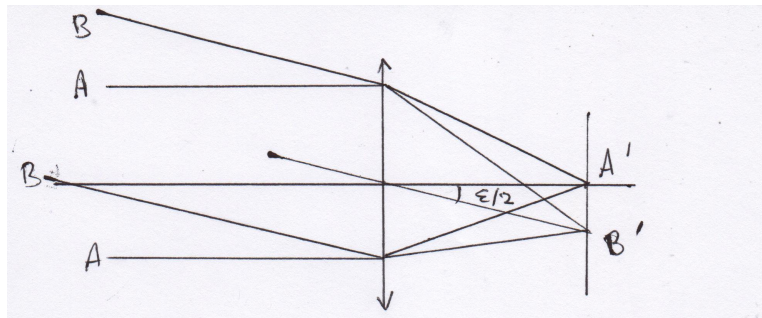
Pour qu'on puisse observer ce brouillage, il faut être en mesure de déplacer le miroir mobile d'au moins 7,7 mm depuis le contact optique. Comme l'énoncé ne donne pas la valeur de $\Delta z_{\max}$, je ne peux pas dire si c'est possible avec le montage proposée par l'énoncé. Si la valeur de 1035 micromètres indiquée plus haut est $\Delta z_{\max}$, alors c'est impossible.

Observation des galaxies

Mines-Ponts MP 26, corrigé

1. La longueur d'onde $\lambda_0 = 2 \mu\text{m}$ appartient au domaine spectral de l'infrarouge.

2.



La distance entre les deux images est $A'B' = f'\epsilon/2$. On peut distinguer ces deux points si $A'B' > a$, c'est à dire si

$$\epsilon > r_{\text{cam}} \quad \text{avec} \quad \boxed{r_{\text{cam}} = \frac{2a}{f'}} .$$

3. En ordre de grandeur, l'ouverture angulaire d'une tache de diffraction est $\theta \approx \lambda_0/a$ ce qui, dans le plan focal, correspond à une distance $\ell_{\text{diff}} = f'\lambda_0/D$. On peut distinguer A' de B' si $A'B' > \ell_{\text{diff}}$, c'est à dire si

$$\epsilon > r_{\text{diff}} \quad \text{avec} \quad \boxed{r_{\text{diff}} = \frac{2\lambda_0}{D}} .$$

4. Plus D grandit et plus on améliore la résolution liée à la diffraction. Cependant, il ne sert à rien de l'augmenter indéfiniment puisqu'on sera aussi limité par le capteur. Le diamètre $D_{\max}$ est tel que $r_{\text{diff}} = r_{\text{cam}}$ donc

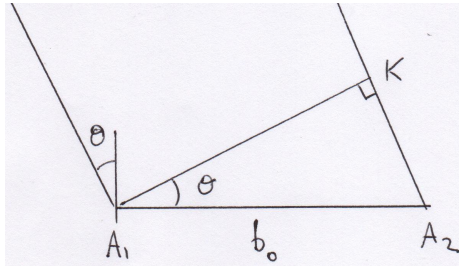
$$\boxed{D_{\max} = \frac{f'\lambda_0}{a} = 20 \text{ m}} .$$

En ordre de grandeur, $D_{\max}$ me semble un peu supérieur au diamètre des plus grands télescopes actuels indiqué par l'énoncé. Il serait inutilement coûteux d'en construire de plus grands, à moins d'améliorer aussi la résolution des capteurs.

5. Soient A_1 et A_2 les points où deux rayons parallèles atteignent les deux télescopes. L'onde incidente est plane et, d'après le théorème de Malus, les points A_1 et K sont sur un même plan d'onde. La différence de marche à l'entrée des télescopes est donc $\delta_0 = KA_2$, c'est à dire

$$\delta_0 = b_0 \sin \theta$$

La valeur de θ n'est pas précisée mais, même avec un angle assez petit, la valeur élevée de b_0 fait que δ_0 dépassera facilement la longueur de cohérence de la lumière issue de l'étoile, ce qui empêcherait l'observation d'interférences. Pour en obtenir, ce qui est le but d'un télescope « interférentiel », il faut compenser cette différence de marche.

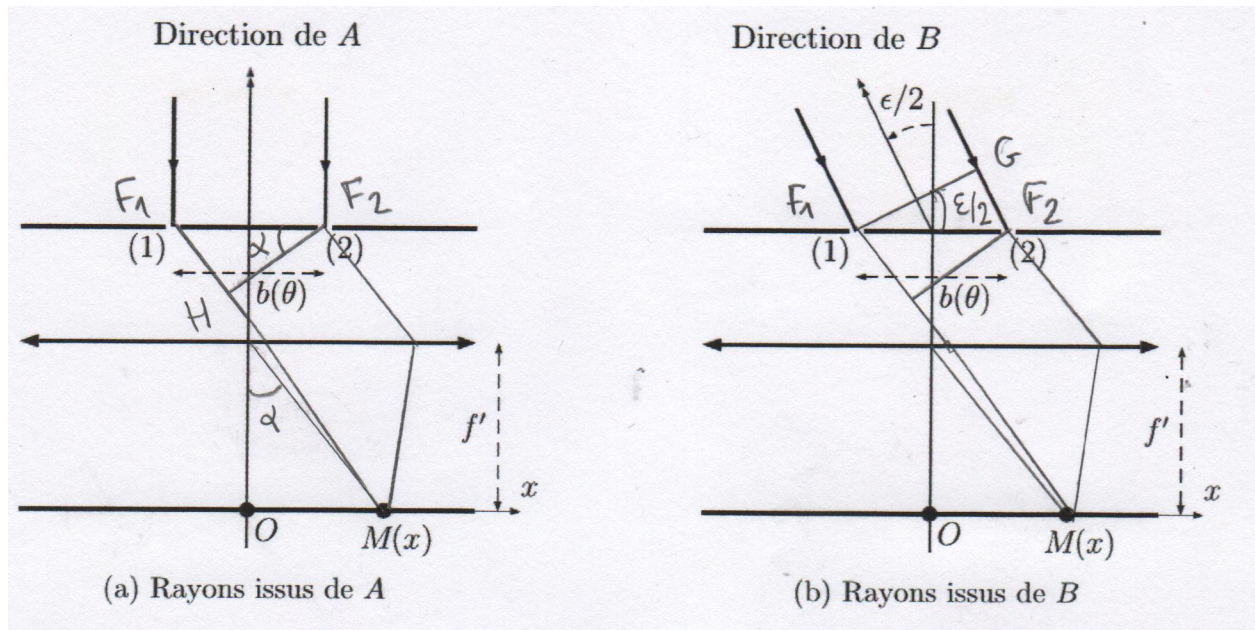


6. La distance b demandée est égale à A_1K et la trigonométrie dans le triangle rectangle A_1A_2K montre que

$$b = b_0 \cos \theta$$

À cause de la rotation de la Terre, les astres se déplacent dans le ciel et, pour pointer en permanence un même astre, le télescope doit modifier son orientation. Cela implique que θ évolue au cours du temps et, par conséquent, la distance b varie.

7.



Pour les rayons incidents issus de A , F_1 et F_2 sont dans un même plan d'onde et la différence de marche s'établit au-delà de ces fentes. Comme M est dans le plan focal image de la lentille, les rayons qui y parviennent émergent des fentes parallèlement l'un à l'autre. Si la lumière venait en sens inverse, elle parcourrait les mêmes rayons ; H et F_2 seraient sur un même plan d'onde, ce qui prouve que $\mathcal{L}_{F_2M} = \mathcal{L}_{HM}$. La différence de marche cherchée est donc

$$\delta_A = F_1H = b \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \sin \alpha \simeq \tan \alpha = \frac{x}{f'} \quad \text{donc} \quad \delta = \frac{bx}{f'} \quad \text{et} \quad p_A(x) = \frac{\delta_A}{\lambda_0} = \frac{bx}{\lambda_0 f'}$$

Les deux ondes sont issues de la même source et, grâce à la compensation évoquée plus haut, elles sont cohérentes. Elles interfèrent donc et on peut appliquer la formule de Fresnel. En notant I_0 l'intensité lumineuse que produirait en M une seule des deux fentes, on a

$$I_A(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \frac{2\pi \delta_A}{\lambda_0} \right] \quad \boxed{I_A(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi bx}{\lambda_0 f'} \right) \right]}$$

Les franges sont définies par $p_A(x) = Cste$, ce qui donne ici $x = Cste$. Ce sont donc des segments de droite perpendiculaires à (Ox) . La frange d'ordre p_A a pour abscisse

$$x_{p_A} = p_A \frac{\lambda_0 f'}{b} \quad \text{donc l'interfrange est} \quad i = x_{p_A+1} - x_{p_A} \quad \boxed{i = \frac{\lambda_0 f'}{b}} .$$

Le calcul des intensités maximale et minimale conduit au contraste :

$$I_{\max} = 4I_0 \quad I_{\min} = 0 \quad C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{4I_0}{4I_0} \quad \boxed{C = 1} .$$

Le contraste des franges ne dépend pas de θ , au contraire de l'interfrange qui en dépend au travers de b .

8. Pour les rayons issus de B , il existe aussi une différence de marche δ_{av} avant l'arrivée sur F_1 et F_2 . En effet, F_1 et G sont sur un même plan d'onde et le rayon passant par F_2 parcourt en plus $GF_2 = b \sin \epsilon/2$, d'où la différence de marche

$$\delta_B = \delta_A - b \sin \theta \quad \text{et l'ordre} \quad p_B = p_A - \frac{b \sin \epsilon/2}{\lambda_0} .$$

Les rayons issus de B sont incohérents avec ceux issus de A ; la lumière issue de B n'interfère pas avec celle issue de A , ce qui explique la superposition des figures d'interférences produites séparément par A et B . Il y a brouillage en cas d'anti-coïncidence, c'est à dire lorsque

$$\exists p \in \mathbb{Z}, \quad p_A - p_B = q + \frac{1}{2} \quad \boxed{b \sin \epsilon/2 = \left(q + \frac{1}{2}\right) \lambda_0} .$$

9. La plus petite valeur de b annulant le contraste est associée à $q = 0$:

$$b = \frac{\lambda_0}{2 \sin \epsilon/2} \quad \boxed{b \simeq \frac{\lambda_0}{\epsilon}} .$$

Expérimentalement, on peut repérer ce brouillage, mesurer la valeur de b associée puis en déduire la valeur de ϵ . Ensuite, la taille ℓ de la galaxie s'en déduit, connaissant sa distance D , par $\ell = D \tan \epsilon \simeq D\epsilon$.

10. Le plus petit écart angulaire est la valeur de ϵ associé à la plus grande valeur de b :

$$\boxed{r_{\text{double}} = \frac{\lambda_0}{b_0}} .$$

À un facteur 2 près, dépendant de la convention sur la résolution, on retrouve le résultat de la question 3, D étant ici remplacée par b_0 . C'est pour cette raison qu'on dit que le système est équivalent à un télescope unique de rayon b_0 . Numériquement $\boxed{r_{\text{double}} = 2.10^{-9} \text{ rad}}$.

11. Un télescope unique de diamètre b_0 recevrait la lumière sur une surface $\pi b_0^2/4$ très supérieure à celle que présentent deux petits télescopes éloignés de b_0 . Le système à deux télescopes sera donc beaucoup moins efficace pour observer des objets peu lumineux.

12. Les ondes lumineuses issues de points (c'est à dire d'étoiles) distincts de la galaxie sont incohérents et n'interfèrent pas entre deux. On obtient donc la superposition d'une multitude de familles de franges et, en un point de l'écran, l'intensité lumineuse est la somme intégrale des intensités que produiraient séparément chacun des secteurs infinitésimaux de la galaxie. Les bords de la galaxie sont définis par $\alpha = -\epsilon/2$ et $\alpha = \epsilon/2$ donc

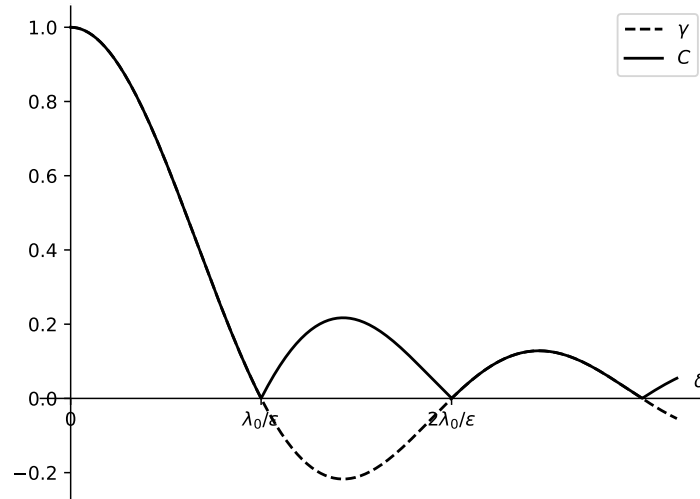
$$I_{\text{gal}} = \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \Gamma d\alpha \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi b(x/f' + \alpha)}{\lambda_0} \right] \right\} = \Gamma \epsilon + \Gamma \frac{\lambda_0}{2\pi b} \left\{ \sin \left[\frac{2\pi b(x/f' + \epsilon/2)}{\lambda_0} \right] - \sin \left[\frac{2\pi b(x/f' - \epsilon/2)}{\lambda_0} \right] \right\} \quad (1)$$

$$I_{\text{gal}} = \Gamma \epsilon + \frac{\Gamma \lambda_0}{2\pi b} 2 \sin \left(\frac{\pi b \epsilon}{\lambda_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi b x / f'}{\lambda_0} \right) \quad \boxed{I_{\text{gal}} = \Gamma \epsilon \left\{ 1 + \gamma \cos \left(\frac{2\pi b x'}{f' \lambda_0} \right) \right\} \quad \text{avec} \quad \gamma = \text{sinc} \left(\frac{\pi b \epsilon}{\lambda_0} \right)} . \quad (2)$$

Le contraste se déduit des intensités maximale et minimale

$$I_{\max} = \Gamma \epsilon (1 + |\gamma|) \quad I_{\min} = \Gamma \epsilon (1 - |\gamma|) \quad C = |\gamma| \quad \boxed{C = \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi b \epsilon}{\lambda_0} \right) \right|}$$

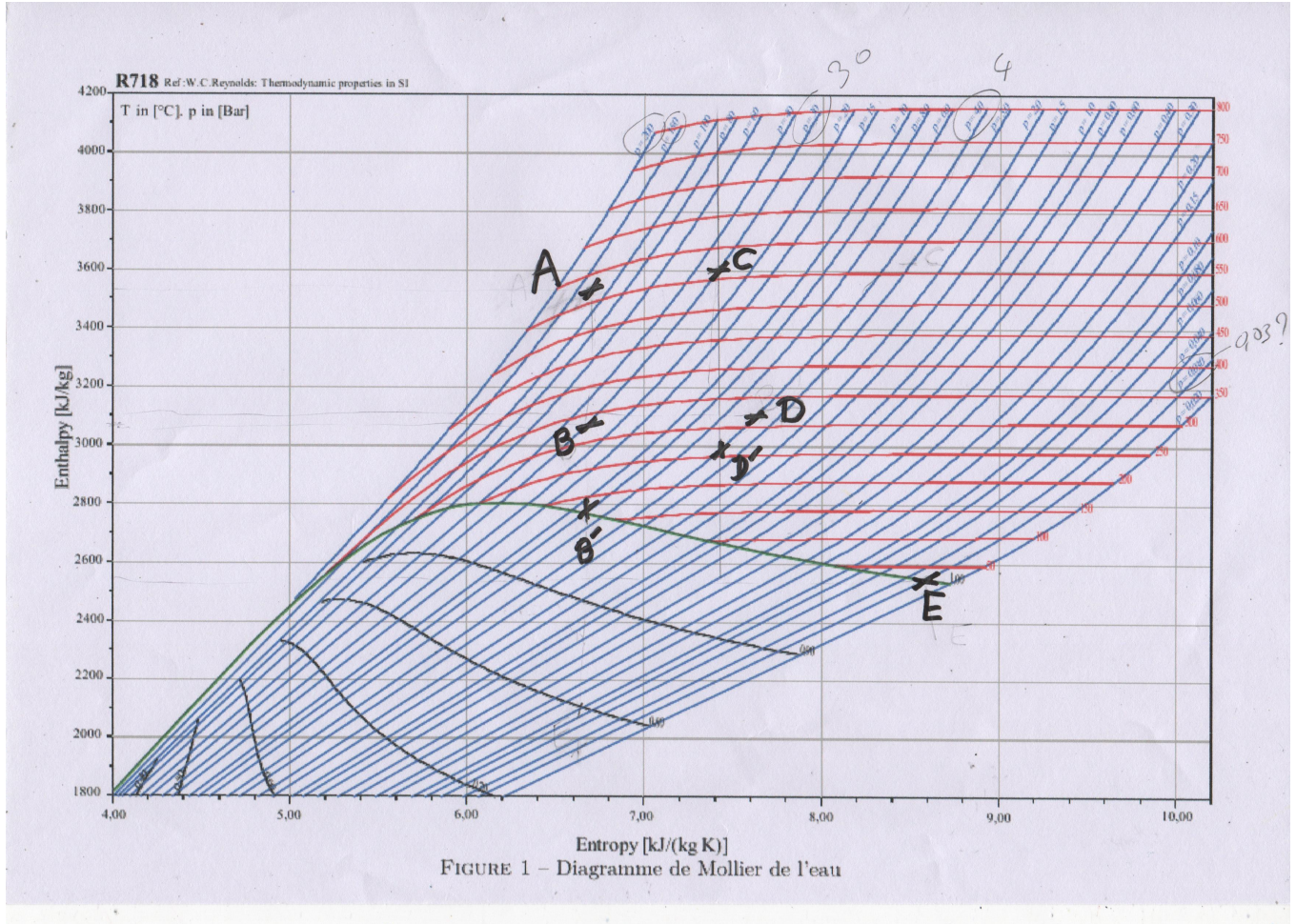
Lorsque b augmente à partir de 0, le contraste diminue puis s'annule lorsque $b = \lambda_0/\epsilon$. Il remonte ensuite légèrement puis oscille en tendant vers 0, tout en restant faible. Avec une étoile double, on aurait une succession de coïncidences et d'anti-coïncidences des deux familles de franges. Le contraste évoluerait périodiquement et on retrouverait de manière périodique des franges bien contrastées et des brouillages.



Turbine à vapeur

Centrale PSI 25

Q 11. On place les points à partir de leur pression et leur température. Pour E , on utilise l'information de l'énoncé selon laquelle, en sortie de la TBP, le fluide est sous forme de vapeur juste saturante : le point E se trouve donc sur la courbe de saturation (ici la courbe de rosée).



Q 12. On voit sur le graphique que les points A et B possèdent la même abscisse, à la précision de lecture près. Autrement dit $s_A = s_B$. La détente peut être considérée comme isentropique.

Cela n'est pas demandé, mais je poursuis un peu cette analyse entropique. Le second principe appliqué à l'étape $A \rightarrow B$ s'écrit

$$s_B - s_A = \frac{q_{AB}}{T_e} + s_{cr} \quad .$$

La turbine est supposée parfaitement calorifugée donc $q_{AB} = 0$. On en déduit $s_{cr} = 0$ ce qui signifie de la détente est réversible.

Pour un gaz parfait, la loi de Laplace s'écrit $P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma$ d'où

$$T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} \quad \boxed{T_B = 583,5 \text{ K} = 310^\circ\text{C}} \quad .$$

En réalité, $T_B = 330^\circ\text{C}$ et le modèle du gaz parfait s'avère assez médiocre.

Q 13. Sur la figure 4, on lit $\rho_A = 11 \text{ kg.m}^{-3}$ On en déduit

$$\boxed{v_A = \frac{D_m}{\rho_A S v_A} = 55 \text{ m.s}^{-1}} \quad .$$

Si la turbine conservait un rayon constant, la conservation du débit massique $\rho_A S_A v_A = \rho_B S_B v_B$ donnerait

$$\boxed{v_B = v_A \frac{\rho_A}{\rho_B} = 165 \text{ m.s}^{-1}} \quad .$$

D'après le premier principe industriel, cette augmentation d'énergie cinétique sera soustraite à la puissance mécanique que l'on peut extraire du fluide. Il est donc souhaitable de l'éviter et pour cela d'avoir $S_B > S_A$, c'est à dire une canalisation s'élargissant vers la sortie.

Q 14. D'après la question précédente, on peut négliger la variation d'énergie cinétique. De plus, la turbine est calorifugée donc le premier principe industriel s'écrit

$$P_{u,HP} = D_m(h_B - h_A) = \frac{534.10^3}{3600}(3080 - 3520) \quad \boxed{P_{u,HP} = -65,3 \text{ MW}} \quad .$$

La puissance transmise à l'arbre est de 65,3 MW.

Q 15. Pour une unique détente isentropique, on atteindrait un point B' tel que $s'_B = s_A$, à une pression inférieure à p_A . Plus la pression atteinte est basse et plus l'enthalpie de sortie l'est, donc plus la puissance extraite est élevée. Cependant, il faut respecter la contrainte mentionnée au début de l'énoncé : il ne doit jamais exister de liquide dans la turbine. La détente est donc limitée au point B' sur la courbe de rosée et pour lequel $h_{B'} = 2780 \text{ kJ.kg}^{-1}$. Dans ces conditions, la puissance transmise à l'arbre serait

$$P_{\max} = -P_u = -D_m(h'_B - h_A) \quad \boxed{P_{\max} = 110 \text{ MW}} \quad .$$

Q 16. Le surchauffeur est un échangeur thermique, il ne comporte pas de pièce mobile et le fluide n'y échange aucun travail. La puissance thermique qu'il reçoit est

$$P_{qSC} = D_m(h_C - h_B) = \frac{534.10^3}{3600}(3600 - 3080) \quad \boxed{P_{qSC} = 77,1 \text{ MW}} \quad .$$

L'application du premier principe aux turbine moyenne pression et basse pression donne

$$P_{u,MP} = D_m(h_D - h_C) \quad P_{u,BP} = D_m(h_E - h_D) \quad \text{donc} \quad P_{u,MP} + P_{u,BP} = D_m(h_E - h_C) = -170,5 \text{ MW} \quad .$$

Au total, le fluide transmet à l'arbre

$$P_{\text{arbre}} = -(P_{u,HP} + P_{u,MP} + P_{u,BP}) \quad \boxed{P_{\text{arbre}} = 236 \text{ MW}} \quad .$$

Cette valeur est plus de deux fois supérieure à celle qu'on obtiendrait par une unique détente ($P_{\max} = 110 \text{ MW}$ calculé précédemment). Le rôle du surchauffeur est donc considérable. Bien entendu, il consomme une certaine puissance (77,1 MW), mais le jeu en vaut la chandelle puisqu'on obtient 126 MW en plus sur l'arbre.

Q 17. Si la détente était adiabatique réversible, elle serait isentropique et on atteindrait le point D' au lieu du point D (à la même pression de 4 bars). On lit $h'_D = 2990 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et donc

$$P_{u,MP,rev} = D_m(h'_D - h_C) \quad \boxed{P_{u,MP,rev} = -100,8 \text{ MW}} \quad .$$

Cette valeur est à comparer à $P_{u,MP} = D_m(h_D - h_C) = -74,2 \text{ MW}$. Il faut se rappeler que c'est $|P_u|$ qui est transmis à l'arbre. La puissance des pertes est donc de 26,6 MW : tout ceci est gaspillé à cause de l'irréversibilité.

On lit $s_C = 7,40 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et $s_D = 7,60 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$. La turbine est adiabatique donc il n'y a pas d'entropie échangée dans la détente CD . Le second principe donne

$$\boxed{s_{crCD} = s_D - s_C = 0,2 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}} \quad .$$

Q 18. Le condenseur est calorifugé, c'est à dire que la vapeur et l'eau de mer échangent de la chaleur l'une avec l'autre, mais que leur ensemble n'en échange pas avec le reste du monde. Un condenseur ne comporte pas de pièce mobile ; les fluides n'y échangent pas de travail. En appliquant le premier principe respectivement à l'eau et à la vapeur, on obtient

$$D_{m\text{ eau}} c_{\text{eau}}(\theta_s - \theta_e) = P_{q,\text{eau}} \quad D_m(h_F - f_E) = P_{q,\text{vap}} \quad .$$

Pour un condenseur bien calorifugé, $P_{q,\text{eau}} + P_{q,\text{vap}} = 0$ donc

$$D_{m\text{ eau}} c_{\text{eau}}(\theta_s - \theta_e) + D_m(h_F - h_E) = 0 \quad .$$

On peut obtenir directement ce résultat en appliquant le premier principe industriel sous la forme adaptée aux systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties. On ne peut pas placer le point F sur le graphique : il correspond à de l'eau liquide à 26°C et 1 bar, dans le domaine du liquide qui n'apparaît pas dans le graphique. Comme la transformation EF est une condensation de la vapeur, $h_F - f_E = -\ell_{\text{vap}}$ et

$$\theta_s = \theta_e + \frac{D_m \ell_{\text{vap}}}{c_{\text{eau}} D_{m\text{ eau}}} \quad .$$

Pour l'application numérique, on doit convertir le débit Q de l'eau, donnée en m^3 par heure, en un débit massique $D_{m\text{ eau}}$ en kilogrammes par heure

$$D_{m\text{ eau}} = \frac{33.10^3 \times 1.10^3}{3600} = 9,17.10^3 \text{ kg.s}^{-1} \quad .$$

On obtient ainsi $\boxed{\theta_s = 23,9^\circ\text{C}}$. La valeur obtenue reste sous 30°C et respecte donc les normes environnementales.

Q 19. Le passage dans le stator est vraisemblablement si rapide que les échanges thermiques n'ont pas le temps de se produire. On peut répondre plus précisément en avançant des arguments liés à la diffusion thermique. En ordre de grandeur, le temps de passage du fluide dans le stator est donné par $\Delta t \simeq b/v_A$. Soit τ_{diff} le temps de diffusion thermique dans le fluide. On peut l'estimer par $\tau_{\text{diff}} \simeq a^2/D$ où a est l'épaisseur de la couche fluide et D le coefficient de diffusion. On peut supposer l'évolution adiabatique si $\Delta t \ll \tau_{\text{diff}}$, c'est à dire si

$$\boxed{\frac{b}{v_A} \ll \frac{a^2}{D}} \quad .$$

Q 20. Comme l'évolution est isentropique et le gaz supposé parfait, on peut utiliser la relation de Laplace qui donne

$$T_1 = T_A \left(\frac{p_1}{p_A} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_A \left(\frac{p_A - \Delta p_1}{p_A} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \simeq T_A \left(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\Delta p_1}{p_1} \right) \quad \Delta T_1 = T_1 - T_A \quad \boxed{\Delta T_1 = T_A \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\Delta p_1}{p_1}} \quad .$$

On obtient ainsi $\boxed{\Delta T_1 = -9,8 \text{ K}}$, c'est à dire $T_1 = 828,2 \text{ K}$. Le calcul exact, sans linéariser, donne $T_1 = 828,5 \text{ K}$.

Le stator ne comporte pas de pièce mobile et l'évolution y est adiabatique. Le premier principe s'écrit donc

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_A + \frac{v_A^2}{2}$$

d'où on tire

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2c_p(T_A - T_1) + v_A^2} = 202 \text{ m.s}^{-1}} \quad .$$

Détection des ondes gravitationnelles

Concours PT 2020

1. Chaque rayon rencontre deux fois la séparatrice pour la traverser ou s'y réfléchir. Donc l'éclairement de chacun des rayons est $E_0/4$.

2. L'un des rayons parcourt à l'aller et au retour le bras de longueur L_y avec un indice n_y , et l'autre le bras de longueur L_x avec un indice n_x . La différence de marche associée est $\delta = \mathcal{L}_y - \mathcal{L}_x = 2n_y L_y - 2n_x L_x$. De plus, il ne faut pas oublier que l'un des rayons s'est réfléchi sur la face gauche de la séparatrice, et l'autre sur la face droite, ce qui entraîne un déphasage supplémentaire de π . Donc

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \pi \quad \boxed{\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x) + \pi} .$$

3. Les deux ondes sont cohérentes et interfèrent donc on peut appliquer la formule de Fresnel avec ici un éclairement commun égal à $E_0/4$:

$$E_y = 2 \frac{E_0}{4} [1 + \cos \varphi] \quad (3)$$

$$E_y = \frac{E_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x) + \pi \right) \right] \quad (4)$$

$$\boxed{E_y = \frac{E_0}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x) \right) \right]} . \quad (5)$$

4. Comme z varie au plus de D , $2\pi f_0 z/c$ varie au plus de $2\pi f_0 D/c = 2.10^{-5} \text{ rad} \ll \pi$. Négliger la dépendance en z dans l'expression de τ est donc tout à fait légitime.

5. Comme n_x et n_y varient dans le temps, l'éclairement E_y à détecter varie avec la même échelle de temps, c'est à dire avec une période $T_0 = 1/f_0 = 10^{-3} \text{ s}$. On a donc $T_d = T_0/10 \ll T_0$. Pendant le temps d'intégration du détecteur, E_y varie assez peu et on peut considérer, autour d'un instant particulier t , que E_y est presque constant pour appliquer l'expression de la question 3 avec la valeur de φ évaluée à l'instant t .

6. Notons $\varphi' = \varphi - \pi$ (c'est l'argument du cosinus à la fin de la question 3).

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda} [(1 + \tau)L_y - (1 - \tau)L_x] \\ &= \frac{4\pi}{\lambda} [L_y - L_x + \tau(L_y + L_x)] \\ \varphi' &= \frac{4\pi}{\lambda} (L_y - L_x) + \frac{4\pi}{\lambda} \tau (L_y + L_x) \end{aligned}$$

Posons $\varphi_0 = \frac{4\pi}{\lambda} (L_y - L_x)$ et $\delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} \tau (L_y + L_x)$ avec $\delta\varphi \ll \pi$. On procède à un développement limité à l'ordre 1 de $\cos \varphi'$ dans l'expression de E_y :

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{E_0}{2} [1 - \cos(\varphi_0 + \delta\varphi)] \\ &= \frac{E_0}{2} [1 - (\cos \varphi_0 - \delta\varphi \sin \varphi_0)] \\ &= \frac{E_0}{2} (1 - \cos \varphi_0) + \frac{E_0}{2} \delta\varphi \sin \varphi_0 \\ \frac{E_y}{E_0} &= \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \tau (L_y + L_x) \sin \varphi_0 . \end{aligned}$$

7. C'est le terme en τ qui traduit le passage de l'onde gravitationnelle. Il est maximal (en valeur absolue) si $|\sin \varphi_0| = 1$ c'est à dire si $\varphi_0 = \pi/2 + \ell\pi$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas la variation maximale de E_y est $\frac{4\pi}{\lambda} \tau_M (L_y + L_x) E_0$ (je prends une valeur crête à crête, τ varie de $2\tau_M$ entre $-\tau_M$ et $+\tau_M$). Comme la puissance est proportionnelle à l'éclairement,

$$\boxed{\delta P = P_0 \frac{4\pi}{\lambda} \tau_M (L_y + L_x) = 1,2.10^{-9} \text{ W}} \quad (\text{ou } 6.10^{-10} \text{ W} \quad \text{si on prend l'amplitude}).$$

8. L'énergie moyenne reçue par le capteur est $\langle P_y \rangle T_d$ et chaque photon possède une énergie hc/λ , donc le nombre de photons moyen est

$$\langle N \rangle = \frac{\langle P_y \rangle T_d \lambda}{hc} .$$

9. La fluctuation du nombre de photons est $\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle}$ et $\langle N \rangle$ est exprimé par la réponse à la question 8. L'énoncé dit clairement qu'on doit évaluer cette fluctuation *en l'absence d'onde gravitationnelle*. Donc, dans le résultat de la question 8, on évalue $\langle P_y \rangle$ lorsque $\tau = 0$. Dans ce cas on a

$$\frac{E_y}{E_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} = \frac{1}{2}$$

car $\varphi_0 = \pi/2$. Comme E_y est proportionnel à $\langle P_y \rangle$, $\langle P_y \rangle = P_0/2$ et donc

$$\Delta N = \sqrt{\frac{P_0 T_d \lambda}{2hc}} .$$

La fluctuation de puissance est proportionnelle à celle du nombre de photons

$$\Delta P_y = \frac{hc}{\lambda T_d} \Delta N = \frac{hc}{\lambda T_d} \sqrt{\frac{P_0 T_d \lambda}{2hc}} \quad \boxed{\Delta P_y = \sqrt{\frac{P_0 hc}{2\lambda T_d}}}$$

10. Pour $\tau = 0$ et pour $\tau \neq 0$, on a respectivement, lorsque $\varphi_0 = \pi/2$:

$$\frac{E_y(0)}{E_0} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{E_y(\tau)}{E_0} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{\lambda} \tau (L_y + L_x)$$

donc

$$\frac{E_y(\tau) - E_y(0)}{E_0} = \frac{2\pi\tau}{\lambda} (L_x + L_y) .$$

Comme $\langle P_y \rangle$ est proportionnelle à E_y , il en résulte

$$\langle P_y(\tau) \rangle - \langle P_y(0) \rangle = \frac{2\pi\tau}{\lambda} (L_x + L_y) P_0 .$$

L'onde gravitationnelle est donc détectable si

$$\frac{2\pi\tau_M}{\lambda} (L_x + L_y) P_0 > \sqrt{\frac{P_0 hc}{2\lambda T_d}} \quad \tau > \tau_{M \min} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau_{M \min} = \frac{1}{2\pi(L_x + L_y)} \sqrt{\frac{\lambda hc}{2P_0}}} .$$

On obtient numériquement la valeur limite $\tau_{M \min} = 2.10^{-19}$ alors que la valeur à mesurer est 10^{-21} . Le système ne convient pas !

11. Par rapport à la précédente, une onde qui a effectué un aller-retour supplémentaire présente la différence de marche $2l_x n_x$, donc $\psi = \frac{2\pi}{\lambda} n_x l_x$.

12. En l'absence d'onde gravitationnelle, $n_x = 1$ et la condition de phase est $\psi = 2\ell\pi$, c'est à dire $l_x = \ell\lambda/2$ avec $\ell \in \mathbb{N}$.

13. Pour la direction y , il suffit de changer τ en $-\tau$ et l_x en l_y .

$$\delta\varphi_y = \pi - \frac{4\pi F\tau(t)l_y}{\lambda} .$$

14. La formule de Fresnel s'applique toujours, mais il faut tenir compte dans l'expression de φ de l'effet des aller-retours entre les lames. L'énoncé explique qu'il faut ajouter $\delta\varphi_y - \delta\varphi_x$ au déphasage qu'on aurait en l'absence d'onde gravitationnelle, donc

$$\varphi' = \varphi_0 + \pi + \delta\varphi_y - \delta\varphi_x \quad \varphi' = \varphi_0 + \pi - \frac{4\pi F\tau}{\lambda} (L_x + L_y) .$$

La variation de phase provoquée par l'onde est maintenant

$$\delta\varphi = -\frac{4\pi F\tau}{\lambda}(L_x + L_y) \quad .$$

Par rapport au résultat de la question 6, le terme de variation est donc simplement multiplié par $-F$:

$$\boxed{\frac{E_y}{E_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} - \frac{2\pi}{\lambda} F\tau(L_y + L_x) \sin \varphi_0} \quad .$$

15. Tout se passe comme si $(L_x + L_y)$ était multiplié par $F = 399$. La valeur minimale que l'on peut détecter est donc divisée par autant

$$\boxed{\tau_{Mmin} = 5.10^{-22}} \quad .$$

Cette valeur est inférieure à 10^{-21} , la détection est maintenant possible.