

Problème 1 — Inégalités de Hölder et de Minkowski ()**

On fixe p dans $]1, +\infty[$ et on pose $q = \frac{p}{p-1}$. Par commodité, on estime que le nombre 0^p est bien défini et qu'il vaut 0.

Provisoirement, on fixe un entier $n \geq 2$. Pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

et on définit $\|x\|_q$ de manière analogue.

Question 1. Montrer que la fonction $\|\cdot\|_p$ est positivement homogène et qu'elle vérifie la propriété de séparation.

Question 2. Vérifier que q est dans $]1, +\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Question 3. Pour tout couple (α, β) de $\mathbb{R}^2$, prouver l'inégalité $|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$.

Question 4. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Pour cela, on appliquera la formule de la question précédente aux nombres x_k/X et y_k/Y pour des choix habiles de X et Y .

Question 5. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

5.a. Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p \times \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}.$$

5.b. Majorer de même la somme $\sum_{k=1}^n |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$.

5.c. En déduire l'inégalité de Minkowski $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

5.d. Qu'a-t-on démontré?

Question 6. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\|x\|_p$ tend vers $\|x\|_\infty$ quand p tend vers $+\infty$.

Maintenant, on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles $u = (u_k)_{k \geq 0}$ telles que la série $\sum |u_k|^p$ soit absolument convergente. Pour toute suite u de ℓ^p , on pose

$$N_p(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

Question 7. Montrer que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question 8. Montrer que N_p est une norme sur ℓ^p .

Question 9. Soient $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$. Montrer que la série $\sum |u_k v_k|$ est convergente et prouver la majoration

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leq N_p(u) N_q(v).$$

Exercice 1. (*) Pour tout x dans $[0, 1]$, on définit la fonction $g_x : t \mapsto t + (x - t^2)/2$.

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$ en prenant pour P_0 la fonction $x \mapsto 1$ puis en posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad P_{n+1}(x) = g_x(P_n(x)).$$

Question 10. Dresser le tableau de variations de g_x sur $[0, 1]$.

Question 11. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que tous les termes de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $[0, 1]$ et que cette suite est décroissante. En déduire que cette suite converge et déterminer sa limite.

Question 12. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'identité

$$\forall x \in [0, 1], \quad P'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + P'_n(x)(1 - P_n(x)).$$

Question 13. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction P_n est croissante sur $[0, 1]$.

Question 14. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0, 1]$, obtenir l'encadrement

$$0 \leq P_n(x) - \sqrt{x} \leq P_n(0).$$

Pour l'inégalité de droite, on procédera par récurrence.

Question 15. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 2. (*) Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient X et Y deux variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

On reprend les nombres p et q du problème 1.

Question 16. Montrer l'inégalité $\mathbb{E}(|XY|) \leq (\mathbb{E}(|X|^p))^{1/p} (\mathbb{E}(|Y|^q))^{1/q}$.

Exercice 3. (*) Soit un entier $n \geq 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\text{rg}(M) = 2$.

Question 17. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{K})$ telles que $M = AB$.

Question 18. On pose $C = BA$. Donner sans démonstration un polynôme annulateur de C de degré 2.

Question 19. En déduire un polynôme annulateur de M de degré 3.

Question 20. Trouver un polynôme annulateur de degré 3 de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Exercice 4. (*)** On définit une suite d'entiers $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 0$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 4n - \text{Card}([0, n-1] \cap \{u_0, \dots, u_{n-1}\}).$$

Question 21. Calculer u_n pour tout $n \in [0, 6]$.

Question 22. On pose $\alpha = 2 + \sqrt{3}$. Justifier que α est irrationnel puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lfloor n\alpha \rfloor.$$

Question 23. On considère la suite d'entiers auto-référente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le début est

$$(2, \underbrace{3, 3}_2, 2, \underbrace{3, 3, 3}_3, 2, \underbrace{3, 3, 3}_3, 2, \underbrace{3, 3}_2, 2, \dots).$$

Ce qui caractérise cette suite est que si on considère les longueurs des blocs d'indices consécutifs correspondant aux termes de cette suite égaux à 3, on obtient cette même suite.

Montrer l'égalité $\{k \in \mathbb{N} ; a_k = 2\} = \{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$.