Exercice 1. (*) Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a_k)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 2. (*) Montrer que les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f_1 : x \mapsto x \qquad f_2 : x \mapsto x^2 \qquad f_3 : x \mapsto x\ln(x) \qquad f_4 : x \mapsto x^2\ln(x)$$

forment une famille libre.

Exercice 3. (**) Soit E un espace vectoriel complexe. On prend des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de E.
Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad a_{i,1}v_1 + \cdots + a_{i,n}v_n = 0_\mathrm{E}.$$

Montrer que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont nuls.

Exercice 4. (*) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

a. Montrer les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \quad &\iff \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2); \\ \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E} \quad &\iff \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2). \end{aligned}$$

b. On note g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f. Quelles propriétés de g les propriétés ci-dessus traduisent-elles ?

c. Si on suppose que E est de dimension finie, que peut-on démontrer de plus ?

Exercice 5. (*) Soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, où E et F sont de dimension finie. Démontrer l'encadrement suivant

$$|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Exercice 6. (*) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On considère deux endomorphismes f et g de E et on fait les hypothèses suivantes

$$f + g = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans E. Montrer de plus que f et g sont les projecteurs associés.

Exercice 7. (**) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

On suppose que pour tout $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Exercice 8. (**) Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur, dont on exprimera le noyau et l'image en fonction de ceux de p et de q.

Exercice 9. (*) a. Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.
Démontrer l'égalité

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f).$$

Pour cela, on considérera la restriction de g à $\mathrm{Im}(f)$.

b. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Montrer que la suite de terme général $\rho_k = \mathrm{rg}(f^k) - \mathrm{rg}(f^{k+1})$ est décroissante.

Montrer de plus que les termes de cette suite sont nuls à partir d'un certain rang p.

c. Montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E.

d. Vérifier que F et G sont stables par f.

e. On note f_1 et f_2 les endomorphismes de F et de G induits par f. Montrer que $(f_1)^p$ est nul et que f_2 est bijectif.

Exercice 10. (*) On pose $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse $\mathrm{M}^2 = \mathrm{N}$.

a. Justifier que Ker(N) et Im(N) sont stables par M.

b. Déterminer le noyau et l'image de N. Qu'en déduit-on quant aux coefficients de M ?

c. Conclure.

Exercice 11. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, donc la dimension est notée n. Soit f un endomorphisme de E.

On suppose que f est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier k tel que f^k soit l'endomorphisme nul de E. *L'indice de nilpotence* de f est l'entier

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} \ ; \ f^k = 0\}.$$

a. On prend x_0 dans $\mathrm{E} \setminus \mathrm{Ker}(f^{p-1})$. Montrer que la famille

$$\mathcal{F}_{x_0} = (f^{p-1}(x_0), \dots, f(x_0), x_0)$$

est libre.

b. En déduire une inégalité entre p et n.

c. Dans cette question, on suppose que p est égal à n. En choisissant x_0 comme à la question **a**, la famille $\mathcal{F}_{x_0}$ est alors une base de E.

Écrire la matrice représentative de f relativement à cette base.

Exercice 12. (***) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ et $v \in \mathrm{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Montrer que l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(v)$ a lieu si, et seulement si, il existe $h \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ vérifiant $u = v \circ h$.

Exercice 13. (**) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E de dimension p_1. Soit F_1 un sous-espace vectoriel de F de dimension n_1.

On pose $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \ ; \ u(\mathrm{E}_1) \subset \mathrm{F}_1\}$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et calculer sa dimension.

Pour cela, on établira un isomorphisme entre $\mathcal{A}$ et un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en représentant les éléments de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans deux bases bien choisies.

Exercice 14. (*) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 15. (*) Montrer que la matrice $\mathrm{A} = (\sin(i+j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est de rang 2.

Exercice 16. (**) Trouver tous les couples (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les égalités $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. (*) Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $[\![1, n]\!]$, montrer l'égalité

$$\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k} \mathrm{E}_{i,\ell}.$$

b. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que l'égalité $\mathrm{tr}(\mathrm{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathrm{ACB})$ a lieu pour tout couple (B, C) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est une matrice scalaire (c'est-à-dire un multiple de la matrice I_n).

Exercice 18. (**) On fixe A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit l'endomorphisme $\Phi_\mathrm{A} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{XA}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer la trace de Φ_A.

Exercice 19. (**) On considère une matrice $M = (m_{j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on suppose que M est une *matrice à diagonale dominante selon les lignes*, ce qui s'écrit en formule

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \qquad |m_{j,j}| > \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} |m_{j,k}|.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la matrice M est inversible.

Pour cela, on considère un élément Y de son noyau et on raisonne par l'absurde en supposant que Y n'est pas nul. Choisir un coefficient de Y dont le module est maximal et obtenir une absurdité.

Exercice 20. (*) On fixe n dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a,b)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a et tous les autres coefficients valent b.

a. On pose $J = \frac{1}{n}M(1,1)$. Trouver un polynôme annulateur de J.

b. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Écrire la matrice $M(a,b)$ comme polynôme en J. En déduire le calcul des puissances de $M(a,b)^p$.

c. Montrer que l'ensemble $\mathscr{M} = \{M(x,y)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est stable par produit.

Exercice 21. (***) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E ayant même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E qui soit à la fois un supplémentaire de F et de G dans E.

Exercice 22. (**) Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie. On considère $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer les inégalités

$$\mathrm{rg}(v\circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(v\circ u) \geqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim(F).$$

Exercice 23. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est de rang 1.

a. Montrer qu'il existe des vecteurs colonnes X et Y non nuls tels que $A = X \cdot Y^T$.

b. En déduire un polynôme annulateur de A de degré 2.

Exercice 24. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note r le rang de A.

Montrer qu'il existe des vecteurs colonnes $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ tels que $A = \sum_{k=1}^{r} X_k \cdot Y_k^T$.

Exercice 25. (**) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M n'est pas un multiple de I_n.

a. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ ait E_2 pour première colonne.

b. Montrer que l'ensemble $\{Q^{-1}MQ\ ;\ Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$ n'est pas borné.

On pourra utiliser des matrices Q diagonales.

Exercice 26. (*) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Calculer $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 27. (*) Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \max(i,j)$.

Exercice 28. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout z dans $\mathbb{C}^*$, calculer le déterminant de la matrice $M_n(z)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux valent $z + \dfrac{1}{z}$, les coefficients qui bordent la diagonale valent 1, et les autres sont nuls.

Exercice 29. (*) Soient A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$.

Exercice 30. (*) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'égalité $\det \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n - B^2)$.

Exercice 31. (**) Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'égalité $\det(C + M) = \det(M)$ a lieu pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que C est nulle.

Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que C n'est pas nulle : on extrait une colonne non nulle de C et on la complète en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ puis on construit une matrice M non inversible telle que $C + M$ soit inversible.

Exercice 32. (*) Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme $T : M \mapsto M^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 33. (**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 34. On fixe un entier $n \geqslant 2$.

1. (*) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_{A,B} & : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & & t & \mapsto & \det(A + tB) \end{array}$$

est une fonction polynomiale.

Montrer de plus que le degré de $f_{A,B}$ est majoré par le rang de B et que le degré de $f_{A,B}$ vaut n si B est inversible.

2. (**) On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

a. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x + a_n \end{pmatrix}$.

b. On prend α et β distincts dans $\mathbb{K}$ et on prend $A = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \beta & \cdots & \beta \\ \alpha & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \alpha & \cdots & \alpha & \gamma_n \end{pmatrix}$. Exprimer la fonction $f_{A,J}$ et en déduire une expression du déterminant de A.

3. (***) On considère quatre matrices A, B, C, D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. On suppose que A et C commutent.

a. On suppose dans cette question que A est inversible. Montrer l'égalité $\det(M) = \det(AD - CB)$.

b. Montrer cette égalité dans le cas où A n'est pas nécessairement inversible. On pourra pour cela introduire la fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ qui à λ associe le déterminant de la matrice $M_\lambda = \begin{pmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

c. Quelle formule obtient-on si A est inversible mais ne commute pas avec C ?

4. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, justifier l'égalité $\overline{\det(M)} = \det \overline{M}$.

Exercice 35. (**) Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \exp(i2\pi/n)$.

On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$.

a. Calculer un argument du déterminant de A.

b. Calculer $\overline{A} \times A$. En déduire la valeur du déterminant de A.
