PC* — mathématiques **jeudi 5 novembre 2026**
Devoir surveillé n° 3 **durée : 2 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Piste bleue : exercices 1 et 2.

Piste rouge : exercices 2 et 3.

Piste noire : exercices 3 et 4.

Exercice 1.

Question 1. Rappeler l'énoncé du théorème de dérivation pour les suites de fonctions (version $\mathcal{C}^1$).

Question 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

2.a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à préciser.

2.b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction f.

2.c. Montrer que la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une certaine fonction g.

La fonction g est-elle égale à f' ?

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1([0,2\pi],\mathbb{R})$.

Pour toute $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$||f||_\infty = \sup\left\{|f(t)| \ ; \ t \in [0,2\pi]\right\}, \quad \text{et} \quad ||f|| = \int_0^{2\pi} |f'(t)| \ \mathrm{d}t + |f(0)|\,.$$

On rappelle que $||\ ||_\infty$ est une norme sur E et on ne demande pas de le redémontrer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{n}\cos(nt)$, qui est un élément de E.

Question 3. Vérifier que $||\ ||$ est une norme sur E.

Question 4. Pour toute $f \in \mathrm{E}$, justifier l'inégalité $||f||_\infty \leqslant ||f||$.

Question 5. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$ vers la fonction nulle.

Question 6. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une certaine fonction g pour la norme $||\ ||$. Montrer que g est la fonction nulle.

Question 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $||f_n|| = 4 + \dfrac{1}{n}$.

Question 8. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente pour la norme $||\ ||$?

Question 9. Les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. On définit la fonction

$$\varphi : t \mapsto \frac{1}{\ln(1-t)} + \frac{1}{t}$$

de $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ \dfrac{1}{n\ln(1-\frac{1}{nx})} & \text{si} \quad x < 0 \text{ ou } x > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Question 10. Montrer que la fonction φ a des limites finies en $-\infty$, en 0 et en 1.

Question 11. En déduire que cette fonction est bornée sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

Question 12. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à préciser.

Question 13. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

Exercice 4.

On considère deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F ainsi qu'une application linéaire $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

On considère une norme N définie sur F. On peut alors définir une fonction $\mathrm{N}_\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{N}_\varphi(x) = \mathrm{N}(\varphi(x)).$$

On a vu dans un exercice que si l'application linéaire φ est injective, alors la fonction N_φ est une norme sur E. On admettra ce résultat dans la suite et on ne demande pas de le redémontrer.

Question 14. Montrer réciproquement que si la fonction N_φ est une norme sur E, alors l'application linéaire φ est injective.

Dans la suite, on choisit E et F égaux à $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et on prend pour N la norme $||\ ||_\infty$.

On fixe une fonction g de E, ce qui permet de définir l'endomorphisme de E

$$\varphi_g : f \mapsto f \times g.$$

La fonction N_{φ_g} sera simplement notée N_g.

Question 15. Dans cette question, on suppose que la fonction g ne s'annule en aucun point de $[0, 1]$.

Justifier que l'endomorphisme φ_g est injectif puis montrer que les normes N et N_g sont équivalentes.

Question 16. On considère l'ensemble

$$\mathrm{Z}(g) = \{x \in [0, 1]\ ;\ g(x) = 0\}$$

et on note $\mathrm{I}(g)$ l'*intérieur* de $\mathrm{Z}(g)$, c'est-à-dire la réunion des intervalles ouverts contenus dans $\mathrm{Z}(g)$.

16.a. On suppose que N_g est une norme sur E. Montrer alors que l'ensemble $\mathrm{I}(g)$ est vide.

16.b. Réciproquement, on suppose que l'ensemble $\mathrm{I}(g)$ est vide. Montrer alors que N_g est une norme sur E.

Question 17. On suppose que l'ensemble $\mathrm{I}(g)$ est vide. On suppose de plus que les normes N et N_g sont équivalentes.

Montrer alors que l'ensemble $\mathrm{Z}(g)$ est vide.

Indication. Pour les questions 16 et 17, on pourra raisonner par l'absurde.
