# DEVOIR N° 7

corrigé

## Sédimentation d'eaux usées

Centrale-supélec

**1.** a) Les particules qui traversent $S$ pendant $dt$ se trouvent au dessus de $S$, dans un région de volume $Sv_\ell dt$. Leur nombre est $dN = n^*(z,t)Sv_\ell dt$. Ce particules traversent de haut en bas. Par définition de $\vec{j}_M$, $dN = \vec{j}_M.(-S\,\vec{u}_z)dt = -j_M S dt$. En identifiant les deux expressions de $dN$, on voit que

$$\vec{j}_M = -n^* v_\ell\,\vec{u}_z = n^*\vec{v}\ell \quad .$$

b) $\vec{j}_D = -D\,\vec{\text{grad}}\,n^* = -D\frac{\partial n^*}{\partial z}\,\vec{u}_z$

c) On considère la région de section $S$ comprise entre le cotes $z$ et $z+dz$. On note $N_{\text{strock}}(t)$ le nombre de particules qu'elle contient à l'instant $t$.

$$N_{\text{stock}}(t) = Sdz\,n^*(z,t) \qquad N_{\text{stock}}(t+dt) = Sdz\,n^*(z,t+dt)$$

Pendant $dt$, il varie de

$$dN_{\text{stock}} = N_{\text{stock}}(t+dt) - N_{\text{strock}}(t) = Sdz\,\frac{\partial n^*}{\partial t}\,dt \quad .$$

Pendant $dt$, le nombre de particules échangées par ce système est

$$dN_e = j(z,t)Sdt - j(z+dz,t)Sdt = -\frac{\partial j}{\partial z}\,Sdz\,dt \quad .$$

Le bilan s'exprime par $dN_{\text{stock}} = dN_e$ d'où $\frac{\partial n^*}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z}$. Or $j = j_M + j_D = -n^* v_\ell - D\frac{\partial n}{\partial z}$. En reportant dans l'équation bilan, on obtient

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n^*}{\partial z} + v_\ell\frac{\partial n^*}{\partial z} \qquad \text{(MW)} \quad .$$

**2.** En régime stationnaire l'équation MW devient

$$\frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + \frac{v_\ell}{D}\frac{\partial n^*}{\partial z} = 0 \quad .$$

Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre pour $\partial n^*/\partial z$ et elle se résout en

$$\frac{\partial n^*}{\partial z} = Ke^{-z/\lambda} \quad \text{avec} \quad \boxed{\lambda = \frac{D}{v_\ell}} \quad .$$

Par intégration,

$$n^*_\infty = -\lambda K e^{-z/\lambda} + F \quad .$$

On a ici deux conditions de bord :

— en $z=0$, $j=0$ car le fond est imperméable aux particules. Cela s'exprime par

$$-n^*_0 v_\ell - D\frac{\partial n^*_\infty}{\partial z}(0,t) = 0$$

$$-n^*_0 v_\ell - DK = 0 \qquad K = -\frac{n^*_0 v_\ell}{D} \qquad \lambda K = -\frac{D}{v_\ell}\times\frac{n^*_0 v_\ell}{D} = -n^*_0$$

— en $z=0$, $n^*_\infty = n^*_0$ donc $-\lambda K + F = n^*_0$ d'où $F = 0$.

$$\boxed{n^*_\infty = n^*_0 e^{-z/\lambda}} \quad .$$

**3.**

$$\lambda = \frac{k_B T}{6\pi\eta r v_\ell} = \frac{k_B T}{\frac{4}{3}\pi r^3(d-1)\rho_e g} = \frac{k_B T}{m_{\text{app}} g}$$

La masse apparente $m_{\text{app}}$ tient compte de la poussée d'Archimède qui compense en partie le poids.

$$n^*_\infty(z) = n^*_0 \exp\left(-\frac{m_{\text{app}} g z}{k_B T}\right) \quad .$$

On retrouve bien le facteur de Boltzmann avec $e_p = m_{\text{app}} g z$.

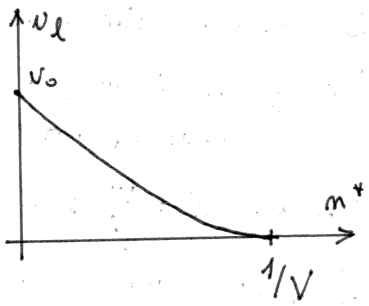
**4.**

| r | $1\,\mu$m | $0{,}1\,\mu$m | $0{,}01\,\mu$m |
|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $6{,}1.10^{-8}$ m | $6{,}1.10^{-5}$ m | $6{,}1.10^{-2}$ m |

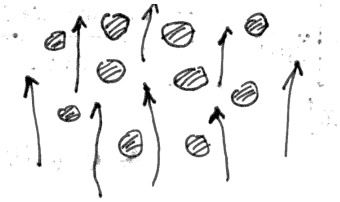
L'énoncé demande ensuite s'il est nécessaire de prendre en compte la diffusion et je trouve cette question difficile. Ne pas prendre en compte la diffusion revient à faire $D = 0$, c'est à dire $\lambda = 0$. En réalité, $\lambda$ est non nul mais reste très inférieur à la hauteur $H$ de la cuve. On peut donc négliger la diffusion. Autre argument : la diffusion tend à homogénéiser la concentration et, si elle était prépondérante, $n^*_\infty$ serait presque uniforme dans la cuve, c'est à dire que la longueur caractéristique $\lambda$ serait très supérieure $H$. Ici au contraire, $\lambda$ est très inférieure à $H$ donc la diffusion ne joue qu'un rôle secondaire.

**1.** a) Dans un volume $d\tau$, il y a $n^* d\tau$ particules qui occupent le volume $n^* d\tau V$. La fraction volumique en particules est donc

$$x = \frac{n^* d\tau V}{d\tau} \qquad \boxed{x = n^* V} \qquad v_\ell = v_0(1 - n^* V)^{5,1} \quad .$$




b) $v_0$ est la valeur de $v_\ell$ si $n^* \to 0$, c'est à dire la vitesse de descente dans un boue très peu chargée. Dans ce cas, chaque grain se déplace comme s'il était seul. Au contraire, quand de nombreux grains serrés descendent, ils obligent l'eau à remonter dans les interstices et ce mouvement est freiné par les frottements visqueux. Cela expliquer pourquoi $v_\ell$ diminue si $n^*$ augmente.



**2.**

$$j = n^* v_\ell = n^* v_0(1 - n^* V)^{5,1} = \frac{v_0}{V} n^* V(1 - n^* V)^{5,1} \qquad j = \frac{v_0}{V} f(x)$$

où $f : x \mapsto x(1-x)^{5,1}$ est la fonction dont le graphe est fourni figure 2. Le maximum de $f$ et de $j$ est atteint pour $x = x_{\max} = 0{,}17$ et vaut

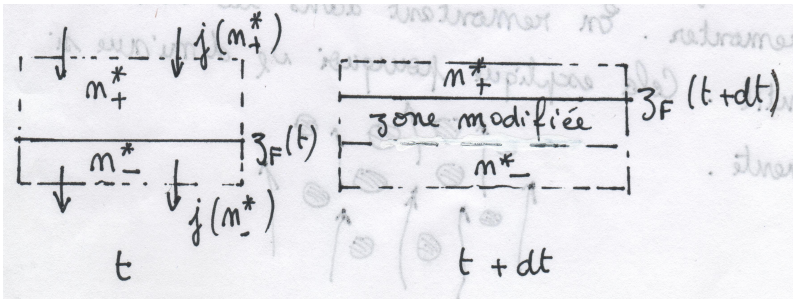
$$j_{\max} = 0{,}066 \frac{v_0}{V} \quad .$$

La pente de $OM$ est $f(x)/x = (1-x)^{5,1} = v_\ell(x)/v_0$ : rapport de la vitesse limite à sa valeur maximale $v_0$.

**3.** a) On rappelle que $j = n^* v_\ell$.

- Dans la zone 1, $n^* = 0$ donc $j = 0$ ;
- dans la zone 2, $n^* = n_0^*$ donc $j = n_0^* v_0(1 - n_0^* V)^{5,1}$ ;
- dans la zone 3, $n^* = 1/V$ donc $v_\ell = 0$ et $j = 0$.

b) On considère une région du décanteur contenant le frontière mobile et englobant la zone modifiée.




Pendant $dt$, la concentration passe de $n_+^*$ à $n_-^*$ dans la couche d'épaisseur $dz_F$, et elle reste inchangée ailleurs. Le nombre de particules dans ce système varie donc de

$$dN_{\text{stock}} = (n_-^* - n_+^*)Sdz_F \quad .$$

Le nombre de particules échangées est

$$dN_e = j(n_+^*)Sdt - j(n_-^*)Sdt = (j(n_+^*) - j(n_-^*))Sdt \quad .$$

Le bilan s'exprime par $dN_{\text{stock}} = dN_e$, d'où

$$v_F = \frac{dz_F}{dt} = -\frac{j(n_+^*) - j(n_-^*)}{n_+^* - n_-^*} \quad .$$

c) Comme $n_1^* = 0$ et $n_2^* = n_0$,

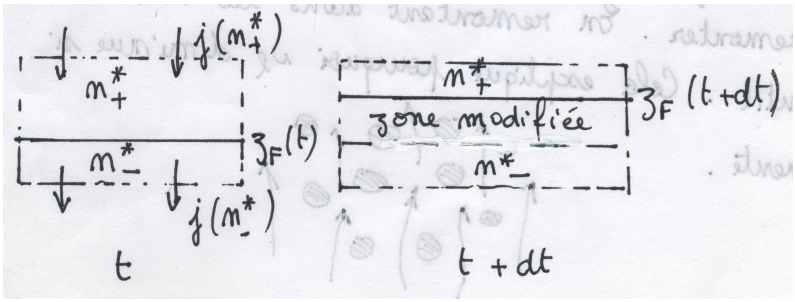
$$v_{12} = -\frac{j(n_0^*)}{n_0^*} = -v_\ell(n_0)^* = -v_0(1-x)^{5,1} = -v_0 \times 0{,}9^{5,1} = -0{,}58v_0 \quad .$$

d) Comme $n_2^* = n_0^*$ et $n_3^* = 1/V$, on obtient

$$v_{23} = -\frac{n_0^* v_0(1-x)^{5,1}}{n_0^* - \frac{1}{V}} \quad \text{avec} \quad n_0^* = \frac{x}{V}$$

$$v_{23} = -\frac{\frac{x}{V}v_0(1-x)^{5,1}}{\frac{x}{V} - \frac{1}{V}} = \frac{xv_0(1-x)^{5,1}}{1-x} \qquad \boxed{v_{23} = \frac{1}{9} \times 9^{5,1}v_0 = 8173v_0} \quad .$$

e) Comme $v_{12} < 0$, la zone 1 purifiée s'agrandit au fil du temps. Comme $v_{23} > 0$, la zone 3 où se concentrent les sédiments grossit elle aussi. La zone 2 trouble, contenant les particules avec leur concentration initiale, s'amenuise peu à peu. À la fin, la zone 2 aura disparu et il ne restera que la zone 1 (limpide) et la zone 3 (opaque).



# Thermique en symétrie sphérique

corrigé

**1.** $\vec{j} = -\lambda \vec{\text{grad}}\, T$ est dirigé selon $\vec{u}_r$. On applique le 1er principe à la matière comprise entre $r$ et $r+\mathrm{d}r$. Pendant $\mathrm{d}t$, elle reçoit

$$\delta Q = j(r)\, 4\pi r^2 \mathrm{d}t - j(r+\mathrm{d}r)\, 4\pi (r+\mathrm{d}r)^2 \mathrm{d}t = -4\pi \mathrm{d}t \left[(r+\mathrm{d}r)^2 j(r+\mathrm{d}r) - r^2 j(r)\right].$$

Son énergie interne varie de

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}m\, c\, (T(r,t+\mathrm{d}t) - T(r,t)) = 4\pi r^2 \mathrm{d}r\, \mu c \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t \quad .$$

Le 1er principe s'écrit donc :

$$4\pi r^2 \mathrm{d}r\, \mu c \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t = -4\pi \mathrm{d}t \left[(r+\mathrm{d}r)^2 j(r+\mathrm{d}r) - r^2 j(r)\right],$$

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 j(r)\right] = +\frac{\lambda}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\mu c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} \quad .$$

On pose $\boxed{D = \dfrac{\lambda}{\mu c}}$ pour écrire $\boxed{\dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0}$

L'équation de la diffusion thermique en régime variable s'écrit $\Delta T - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. En lisant l'expression du laplacien en coordonnées sphériques, on obtient la même expression.

**2.** Avec la forme proposée, on calcule

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (\pi n D)^{-3/2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) t^{-5/2} e^{-\beta} + (\pi n D t)^{-3/2} \times \frac{r^2}{n D t^2} e^{-\beta}$$

$$= (\pi n D t)^{-3/2} \left(-\frac{3}{2t} + \frac{r^2}{n D t^2}\right) e^{-\beta}, \qquad \beta = \frac{r^2}{n D t},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = (\pi n D t)^{-3/2} \times \frac{-2r}{n D t}\, e^{-\beta},$$

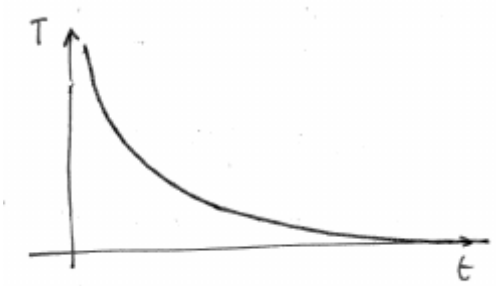
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = (\pi n D t)^{-3/2} \left(-\frac{2}{D n t} + \frac{4r^2}{n^2 D^2 t^2}\right) e^{-\beta},$$

$$\Delta T - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = (\pi n D t)^{-3/2} e^{-\beta} \left(-\frac{2}{Dnt} + \frac{4r^2}{n^2 D^2 t^2} - \frac{4}{nDt} + \frac{3}{2Dt} - \frac{r^2}{nD^2 t^2}\right)$$

$$= (\pi n D t)^{-3/2} e^{-\beta} \left[\frac{1}{Dt}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{n} - \frac{4}{n}\right) + \frac{r^2}{Dt^2}\left(\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n}\right)\right].$$

On obtient une solution si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{2}{n} - \frac{4}{n} = 0 \\ \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n} = 0 \end{cases} \qquad \text{c'est à dire si } \boxed{n = 4}.$$



**3.**

$$T_0(t) = \frac{A}{(4\pi Dt)^{3/2}}$$

**4.**

$$T(r,t) \geqslant \frac{T_0(t)}{2} \iff e^{-r^2/(4Dt)} \geqslant \frac{1}{2} \iff -\frac{r^2}{4Dt} \geqslant -\ln 2 \iff r \leq 2\sqrt{Dt\ln 2}$$

$$\boxed{R(t) = 2\sqrt{\ln 2}\,\sqrt{Dt}}$$

On retrouve la propriété usuelle selon laquelle la longueur caractérisant un phénomène de diffusion varie au cours du temps proportionnellement à $\sqrt{Dt}$.

## B. Thermalisation d'une boule

**1.** On applique le 1er principe à la boule de rayon $R_s$ : $\mathrm{d}U = \delta Q$ s'écrit

$$\frac{4}{3}\pi R_s^3 \mu c\,\mathrm{d}T = -4\pi R_s^2 h\,(T - T_e(t))\,\mathrm{d}t \qquad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{3h}{\mu c R_s}T = \frac{3h}{\mu c R_s}T_e \quad .$$

Cette équation différentielle se résout en

$$\boxed{T(t) = T_e + (T_0 - T_e)\,e^{-t/\tau}} \qquad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{\mu c R_s}{3h}} \quad .$$

**2.** Comme c'est la diffusion thermique qui gouverne le phénomène, $R_s \simeq \sqrt{D\tau}$. À un facteur sans dimension près,

$$\boxed{\tau \simeq \frac{R_s^2}{D}}$$

**3.** $T$ vérifie l'équation démontrée en A.1 :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

**4.** On a

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r}, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2},$$

donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{D}\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0}.$$

**5.** Pour $\theta(r,t) = f(r)g(t)$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = f'(r)g(t), \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} = f(r)g'(t), \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = f''(r)g(t).$$

Cette fonction est solution de l'équation de la diffusion si

$$f''(r)g(t) + \frac{2}{r}f'(r)g(t) = \frac{1}{D}f(r)g'(t) \qquad g(t)\left[f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\right] = \frac{1}{D}f(r)g'(t) \quad .$$

En divisant par $\frac{g(t)f(r)}{D}$, quantités non nulles, on obtient

$$\frac{D}{f(r)}\left[f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\right] = \frac{g'(t)}{g(t)} \quad . \qquad (2)$$

Cette égalité a lieu pour tout $t \in [0, +\infty[$ et $r \in [0, R_s[$. On en déduit l'existence d'une constante $K$ telle que

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = K \quad \text{ou} \quad g'(t) - Kg(t) = 0.$$

Cette équation différentielle se résout en $g(t) = g(0)\,e^{Kt}$.

Pour $K > 0$, on obtient une température tendant vers l'infini, ce qui est inacceptable. On a donc $K < 0$ et on pose $K = -1/\tau$ avec $\tau \in \mathbb{R}^+$, pour écrire

$$g(t) = g(0)\,e^{-t/\tau} \quad .$$

**6.** L'équation de B.5 s'écrit

$$\frac{D}{f}\left[\frac{2}{r}f' + f''\right] = -\frac{1}{\tau} \quad \text{ou} \quad f'' + \frac{2}{r}f' + \frac{1}{D\tau}f = 0$$

$$\text{Pour } f(r) = \frac{\sin \alpha r}{r}\,, \qquad f'(r) = -\frac{1}{r^2}\sin \alpha r + \frac{\alpha}{r}\cos \alpha r \qquad f''(r) = \left(\frac{2}{r^3} - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)\sin \alpha r - \frac{2\alpha}{r^2}\cos \alpha r$$

Cette fonction est solution si et seulement si

$$\left(\frac{2}{r^3} - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)\sin \alpha r - \frac{2\alpha}{r^2}\cos \alpha r - \frac{2}{r^3}\sin \alpha r + \frac{2\alpha}{r^2}\cos \alpha r + \frac{\sin \alpha r}{D\tau r} = 0$$

$$\frac{\sin \alpha r}{r}\left(-\alpha^2 + \frac{1}{D\tau}\right) = 0 \qquad \boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{D\tau}}} \quad .$$

**7.** La loi de Newton à la surface de la boule s'exprimer par : $\vec{j}(R_s, t) = h\,(T_s(t) - T_e)\,\vec{u}_r$, c'est à dire, compte tenu de la loi de Fourier,

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}(R_s^-, t) = h\,(T(R_s, t) - T_e) \quad \text{ou encore} \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r}(R_s^-, t) = h\,\theta(R_s, t)\,. \qquad (1)$$

Or

$$\theta(r,t) = g(t)\,\frac{\sin \alpha r}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}(r,t) = g(t)\left(-\frac{1}{r^2}\sin \alpha r + \frac{\alpha}{r}\cos \alpha r\right) \quad .$$

La condition de bord s'écrit donc

$$-\lambda g(t)\left(-\frac{1}{R_s^2}\sin \alpha R_s + \frac{\alpha}{R_s}\cos \alpha R_s\right) = h\,g(t)\,\frac{\sin \alpha R_s}{R_s}$$

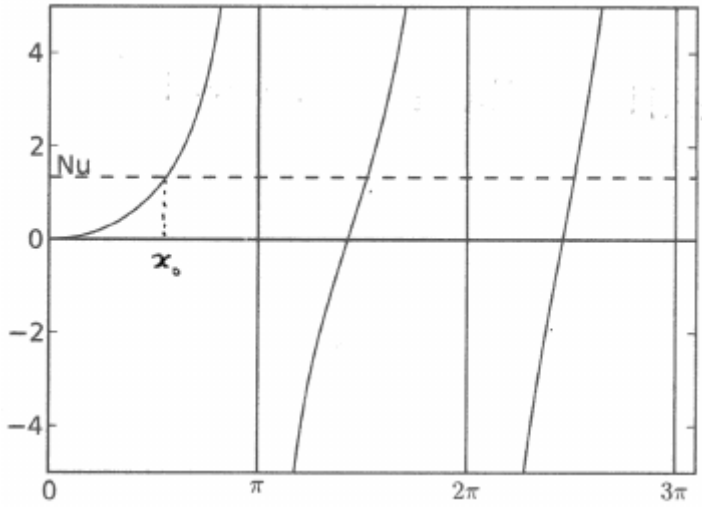
$$\lambda \frac{\sin \alpha R_s}{R_s^2} - \frac{\lambda \alpha}{R_s}\cos \alpha R_s = h\frac{\sin \alpha R_s}{R_s}$$

$$1 - \alpha R_s \frac{\cos \alpha R_s}{\sin \alpha R_s} = \frac{h}{\lambda}R_s$$

$$\text{Comme } x = \alpha R_s \qquad \text{et} \quad Nu = \frac{hR_s}{\lambda} \qquad \boxed{1 - \frac{x}{\tan x} = Nu} \quad .$$

Les variables $x$ et $Nu$ sont sans dimension.

**8.** À l'aide du DL fourni, on trace facilement le graphe de $f : x \longmapsto 1 - \frac{x}{\tan x}$. On voit qu'elle réalise une bijection de $[0, \pi[$ dans $\mathbb{R}^+$, d'où l'existence d'une unique racine $x_0$ entre 0 et $\pi$.




**9.** Par définition, $\alpha R_s = x_0$ donc $\alpha = x_0/R_s$. D'après B.6, $\tau = 1/(D\alpha^2)$, donc

$$\boxed{\tau = \frac{R_s^2}{Dx_0^2}} \quad .$$

**10.** • Si $Nu \ll 1$ :

$$x_0 \ll \pi \qquad f(x) \simeq \frac{x^2}{3}$$

$f(x) = Nu$ donne

$$x_0^2 \simeq 3Nu \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\tau = \frac{R_s^2}{3DNu}} \quad .$$

Comme $Nu = \frac{hR_s}{\lambda}$ et $D = \frac{\lambda}{\mu c}$,

$$\tau = \frac{\mu c R_s}{3h}$$

On retrouve le résultat de B.1. La condition $\nu \ll 1$ s'écrit aussi $hR_s \ll \lambda$. La conduction thermique dans la boule est rapide mais l'échange à sa surface relativement inefficace. C'est donc conducto-convection qui détermine la thermalisation de la boule.

• Si $Nu \gg 1$ : on voit sur la courbe que $x_0 \approx \pi$, donc

$$\boxed{\tau = \frac{R_s^2}{\pi^2 D}} \quad .$$

On retrouve le temps de B.2. L'échange à la surface est très efficace et la thermalisation est gouvernée par la diffusion.

**11.**

$$Nu = 0{,}017 \ll 1 \qquad \boxed{\tau = 8{,}44 \cdot 10^3 \text{ s} = 2\,\text{h}\,21\,\text{min}}$$

## Combustion d'une poutre

Centrale-supélec

**10.** Donner les définitions vues en cours pour la conduction, la convection et le rayonnement.

**11.** Par rayonnement, des zones en feu échauffent à distance des zones pas encore enflammées, provoquent leur ignition et propagent l'incendie.

L'air chaud se déplace d'un point à l'autre du feu et cette convection peut elle aussi contribuer à la propagation de l'incendie. Cet effet est plus marqué en présence de vent.

La conduction thermique dans l'air est certainement négligeable. Par contre, elle joue un rôle ans les solides en combustion dont la température n'est pas uniforme : c'est la suite du problème.

**12.** Pendant $dt$, l'élément de poutre considéré reçoit

$$\delta Q = j(x,t)Sdt - j(x+dx,t)Sdt = -\frac{\partial j}{\partial x} Sdxdt \quad .$$

Il y a aussi un apport dû à la combustion

$$\delta Q' = P_c \mu S dx dt \quad .$$

Pendant $dt$, l'enthalpie varie de $dH = \mu S dx c_p (T(x,t+dt) - T(x,t) = \mu S c_p dx dt \frac{\partial T}{\partial t}$. Le premier principe s'écrit $dH = \delta Q + \delta Q'$, ce qui donne

$$\mu S c_p dt dx \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} Sdxdt + P_c \mu S dx dt$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\mu c_p}\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{P_c}{c_p} \quad .$$

D'après la loi de Fourier, $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ donc

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{P_c}{c_p} \quad \text{et} \quad D = \frac{\lambda}{\mu c_p} \quad .$$

**13.** Dans la zone inaltérée, $P_c$ n'intervient pas et on a simplement

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad .$$

**14.** Pour $L = 10\,\text{cm}$, le temps de diffusion est

$$\tau_d = \frac{L^2}{D} = 10^5\,\text{s} = 30\,\text{heures} \quad .$$

Le temps de combustion $\tau_c$ de la poutre est vraisemblablement de l'ordre d'une heure donc $\tau_c \ll \tau_d$. Cela signifie que les abscisse $x_1$ et $x_2$ se déplacement relativement vite et qu'un régime permanent (comme si ces abscisses étaient fixes) n'a pas le temps de s'établir. On ne peut pas raisonner de manière quasi-stationnaire.

**15.** La constante $c$ représente la vitesse à laquelle avance l'onde de température dans la poutre. Le profil de température se décale sans se déformer à la célérité $c$.

**16.** Comme $T(x,t) = \theta(x - ct)$,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \theta''(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -c\theta'(u) \quad .$$

En reportant dans les équations des questions 12 et 13, on obtient respectivement pour la zone de combustion et pour la zone inaltérée

$$-c\theta' = D\theta'' + \kappa \qquad -c\theta' = D\theta'' \quad .$$

**17.** On peut se contenter de vérifier que les fonctions proposées sont solutions des équations différentielles, mais je préfère partir de l'équa diff. Je pose $u_1 = x_1 - ct$ et $u_2 = x_2 - ct$.

— Pour $x \leqslant x_1$, *i.e.* $u(t) \leqslant u_1(t)$, on est dans la zone déjà brûlée et l'énoncé indique que $T = T_c$. Donc $\theta_1(u) = T_c$, c'est à dire $a_1 = T_c$.

— Pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, *i.e.* $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, on a

$$\theta'' + \frac{c}{D}\theta' = -\frac{\kappa}{D} \quad .$$

Cette équa diff se résout en

$$\theta' = -\frac{\alpha D}{c}e^{-cu/D} - \frac{\kappa}{c} \quad \text{et en intégrant} \quad \theta = -\frac{\alpha D}{c}e^{-cu/D} - \frac{\kappa u}{c} + a_2 \quad \text{avec} \quad a_2 \in \mathbb{R} \quad .$$

On note $b_2 = -\alpha D/c$ et

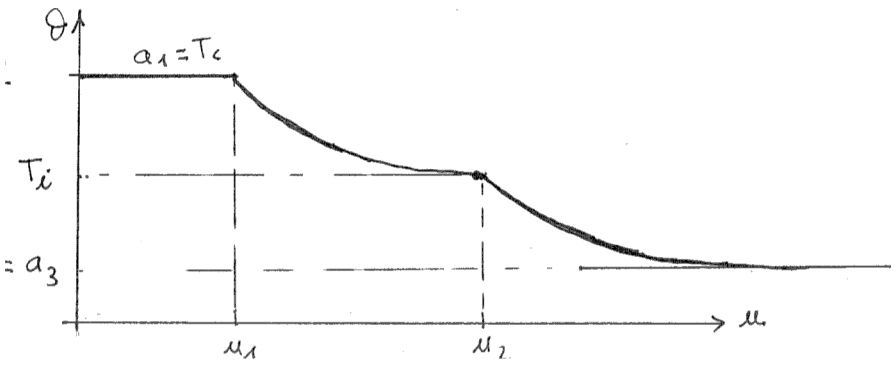
$$\theta = a_2 + b_2 e^{-cu/D} - \frac{\kappa}{c}u \quad .$$

— Pour $x \geqslant x_2$ *i.e.* $u \geqslant u_2$ (zone inaltérée), on obtient de la même manière (il suffit de remplacer $\kappa$ par 0 et de changer le nom des constantes d'intégration)

$$\theta_3 = a_3 + b_3 e^{-cu/D} \quad .$$

**18.** On a déjà trouvé $a_1 = T_c$. Pour $x \to \infty$, $u \to \infty$, la température tend vers $T_\infty$, donc $\theta_0 \to T_\infty$. On en déduit $a_3 = T_\infty$.

**19.** Voici la courbe.




**20.** La température est continue en $u_1$ et en $u_2$.

$$a_1 = a2 + b_2 c^{-cu_1/D} - \frac{\kappa}{c}u_1$$
$$a_2 + b_2 e^{-cu_2/D} - \frac{\kappa u_2}{c} = a_3 + b_3 e^{-cu_2/D} \quad .$$

La flux thermique est aussi continu. Comme $j_x = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda\theta'$, $\theta'$ est continue.

$$\theta_1'(u_1) = \theta_2'(u_1) \qquad 0 = -\frac{cb_2}{D}e^{-cu_1/D} - \frac{\kappa}{c}$$
$$\theta_2'(u_2) = \theta_3'(u_2) \qquad -\frac{cb_2}{D}e^{-cu_2/D} - \frac{\kappa}{c} = -\frac{cb_3}{D}e^{-cu_2/D} \quad .$$

**21.** On pose

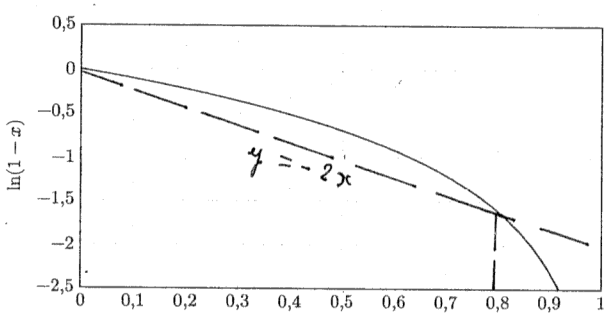
$$x = \frac{c^2}{\kappa D}(T_i - T_\infty) \qquad \frac{c^2}{\kappa D} = \frac{x}{T_i - T_\infty} \quad .$$

L'équation dont $c$ est solution se réécrit

$$\ln(1-x) = \frac{(T_c - T_\infty)x}{T_i - T_\infty} \quad \text{ou encore} \quad \ln(1-x) = -2x \quad \text{avec les valeurs numériques.}$$

La solution cherchée est l'abscisse de l'intersection de la courbe fournie avec la droite d'équation $y = -2x$. On trouve ainsi $x = 0{,}8$ puis

$$c = \sqrt{\frac{\kappa D x}{T_i - T_\infty}} \qquad \boxed{c = 28\,\mu\text{m.s}^{-1}}$$




**22.** $\Delta t = \ell/c = 35.10^3\,\text{s} \simeq 10\,\text{heures}$. Ce résultat me semble surestimer la durée réelle. La conduction thermique n'intervient sans doute pas seule, il faudrait prendre en compte la convection d'air chaud et le rayonnement.