DEVOIR N° 8

Pour le lundi 9 novembre

Sédimentation d'eaux usées

Centrale

L'assainissement des eaux usées dans une station d'épuration nécessite de la débarrasser des effluents domestiques ou industriels, des sables, graisses, déchets ménagers et agents polluants. Cette épuration se fait en plusieurs étapes et nous nous limitons ici à l'étude de l'une d'elles, la décantation des boues résiduelles. Cette opération procède par sédimentation au sein d'un bac décanteur (figure 1). L'eau à traiter est assimilée à une suspension de particules sphériques identiques de rayon $r \leqslant 1\,\text{mm}$ et de densité d. On note $n^*(z,t)$ la densité volumique de particules, exprimée en particules par mètre-cube.

Les particules considérées présentent une densité d supérieure à 1. Sous l'effet du champ de pesanteur $\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$, elles ont donc tendance à se déplacer vers le fond du bac. Ce mouvement descendant est modéré par la poussée d'Archimède et freiné par les frottement visqueux. Nous aurons l'occasion de l'étudier dans le cours de mécanique des fluides et nous admettons ici que la vitesse de descente dans de l'eau au repos est donnée $\vec{v}_\ell = -v_\ell\,\vec{u}_z$ avec

$$v_\ell = \frac{2r^2(d-1)\rho_e g}{9\eta} \quad .$$

Dans ces expressions, ρ_e désigne la masse volumique de l'eau de η sa viscosité.

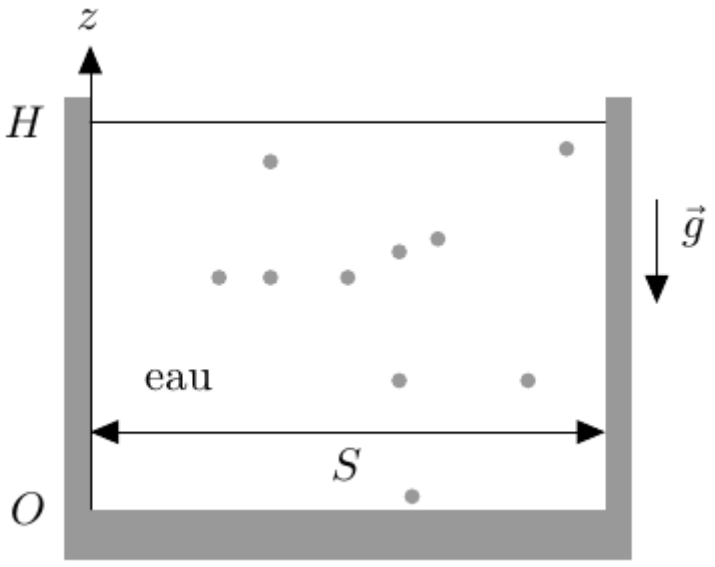


FIGURE 1 – Particules en suspension dans un bac décanteur

A. Profil de concentration à l'équilibre dans un modèle convecto-diffusif

On assimile le bac décanteur à une cuve de hauteur $H = 2\,\text{m}$ et de section S.

1. On s'intéresse ici à l'évolution de la densité volumique de particules $n^*(z,t)$ au cours du temps, sous l'effet de la diffusion et de la gravité.

a) Le mouvement de migration gravitaire à la vitesse $\vec{v}_\ell$ est associé à un transport de particules. On le décrit par un vecteur densité de flux de particules $\vec{j}_M$, exprimé en particules par seconde et par mètres carré.
Considérons une section horizontale du bac d'aire S située à la cote z. Où se trouvent, à l'instant t, les particules qui traversent cette section entre t et $t + dt$? Combien y en a-t-il ? En déduire que $\vec{j}_M(z,t) = n^*(z,t)\vec{v}_\ell$.

b) Ce mouvement gravitaire n'est pas le seul à intervenir : il faut aussi prendre en compte l'agitation thermique des particules qui se traduit par un phénomène de diffusion décrit par la loi de Fick. On note D le coefficient de diffusion des particules dans l'eau et $\vec{j}_D$ le vecteur densité de flux de particules associé. Utiliser la loi de Fick pour exprimer $\vec{j}_D$ en utilisant notamment le vecteur unitaire $\vec{u}_z$.

c) La diffusion et la migration interviennent simultanément de sorte que le vecteur densité de courant de particules est donné par

$$\vec{j} = \vec{j}_D + \vec{j}_M \quad .$$

En effectuant un bilan de particules sur une tranche du bac d'épaisseur dz, montrer que l'évolution n^* est régie par l'équation de Mason-Weaver

$$\frac{\partial n^*}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n^*}{\partial z^2} + v_\ell \frac{\partial n^*}{\partial z} \quad .$$

2. On cherche le profil de concentration $n^*_\infty(z)$ en régime stationnaire.

a) Donner la forme de la solution générale pour $n^*_\infty(z)$ en introduisant une longueur caractéristique λ. Écrire la condition limite pour la densité de flux $\vec{j}$ en $z = 0$ et en déduire la nouvelle forme de $n^*_\infty(z)$, que lon exprimera en fonction de $n^*_0 = n_\infty(0)$, λ et z.

b) La relation de fluctuation-dissipation d'Einstein relie le coefficient de diffusion au coefficient de frottement $6\pi\eta r$ intervenant dans l'expression de la vitesse limite v_ℓ :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \quad .$$

Montrer que la répartition des particules $n^*_\infty(z)$ peut s'interpréter à l'aide du facteur statistique de Boltzmann, qui stipule qu'à l'équilibre thermodynamique, $n_\infty(z)$ est proportionnelle au facteur $\exp(-e_p/(k_B T))$, e_p étant l'énergie potentielle d'une particule, T la température et k_B la constante de Boltzmann.

c) Pour $T = 300\,\mathrm{K}$, $d = 2{,}65$ (densité du quartz) estimer numériquement λ pour $r = 1\,\mu\mathrm{m}$, $r = 0{,}1\,\mu\mathrm{m}$ et $r = 0{,}01\,\mu\mathrm{m}$. Conclure quant à la nécessité de prendre en compte la diffusion dans la modélisation de la sédimentation.

B. Sédimentation d'une suspension concentrée

On néglige désormais les effets diffusifs ; seul $\vec{j}_M$ intervient. À concentration élevée, la vitesse de sédimentation v_ℓ décroît avec la densité volumique de la boue. Ce phénomène est décrit par la loi empirique de Richardson-Zaki : $v_\ell(x) = v_0(1-x)^q$ où x est la fraction volumique en particules solides dans la boue, v_0 une constante et $q \simeq 5{,}1$.

1. a) Relier $x(z,t)$ à la densité volumique en particules solides $n^*(z,t)$ et au volume $V = 4\pi r^3/3$ d'une particule solide. Tracer l'allure de la courbe montrant les variations de v_ℓ en fonction de n^*.

b) Que représente la constante v_0 ? Quelle est la conséquence, pour le mouvement macroscopique de l'eau, de la chute d'un grand nombre de sédiments très serrés ? Expliquer alors qualitativement pourquoi v_ℓ décroît lorsque la concentration en particules augmente.

2. On note $\vec{j}$ le flux de particules (qui s'assimile au flux convectif $\vec{j}_M$ déterminé à la question A.1). Les particules se déplaçant uniquement vers le bas, on note $\vec{j} = -j(z,t)\,\vec{u}_z$. Exprimer $j(z,t)$ en fonction de v_0, V , q et $n^*(z,t)$. En vous aidant de la courbe de la figure 2, déterminer la valeur maximale $j_{\max}$ du flux de particules, en fonction de v_0 et V. Que représente la pente du segment OM ?

3. Une suspension initialement homogène de densité volumique n^*_0 laissée à décanter présente rapidement trois zones distinctes : une zone transparente (1) en haut du décanteur, une zone opaque (3) en bas, et une zone trouble (2) qui les sépare (voir figure 3). Dans chacune de ces trois zones, la densité particulaire n^* est uniforme et indépendante du temps ; on la note n^*_1, n^*_2 ou n^*_3 selon l'intervalle considéré.

a) On admet que $n^*_1 = 0$, $n^*_2 = n^*_0$ et $n^*_3 = 1/V$. Que vaut j dans chaque région ?

b) Bien que la densité reste constante dans chaque zone, le système évolue : les frontières séparant la zone (1) de la zone (2) d'une part, et la zone (2) de la zone (3) d'autre part, se déplacent au fil du temps. Pour un traitement général, on note $\overrightarrow{v_F} = v_F\,\vec{u}_z$ la vitesse à laquelle se déplace la frontière séparant deux domaines de densités particulaires n^*_+ (au dessus) et n^*_- (au dessous), comme le montre la partie droite de la figure (3).

À l'instant t, la frontière se trouve à la cote $z_F(t)$. À l'instant $t + dt$, elle se trouve à la cote $z_F(t+dt) = z_F(t) + v_F dt$. Dans la zone d'épaisseur $v_F dt$ balayée par la frontière, la densité particulaire passe donc de n^*_- à n^*_+ entre ces deux dates. Par un bilan de particules sur une région englobant la frontière mobile, montrer que

$$v_F = -\frac{j(n^*_+) - j(n^*_-)}{n^*_+ - n^*_-} \quad .$$

c) Pour $x = 10\%$, exprimer en fonction de v_0 la vitesse $\vec{v}_{12}$ à laquelle se déplace la frontière entre les zones (1) et (2).

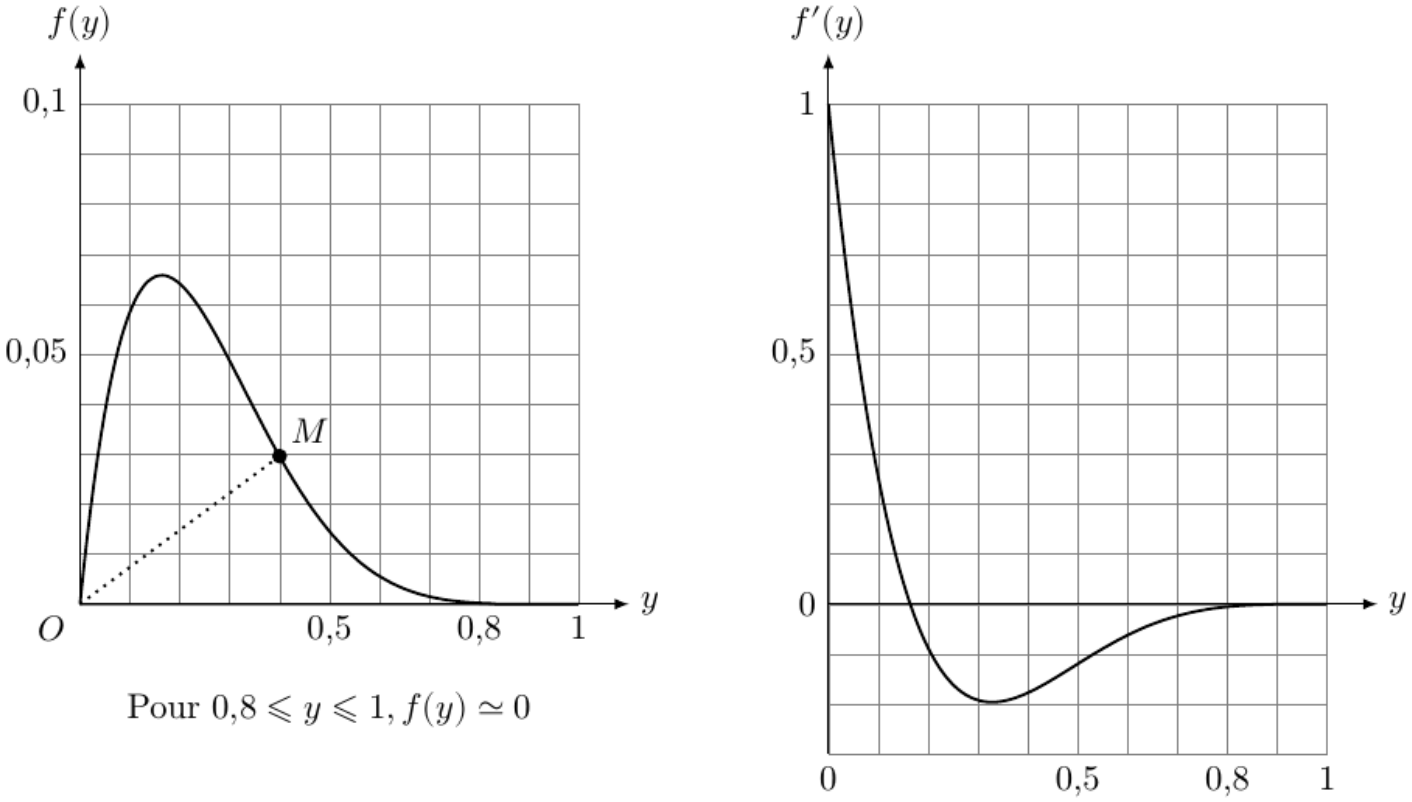


FIGURE 2 – Tracé de la fonction $f : y \to y(1-y)^{5,1}$ et de sa dérivée



FIGURE 3 – Décantation d'une suspension

d) Exprimer en fonction de v_0 la vitesse $\vec{v}_{23}$ à laquelle se déplace la frontière entre les zones (2) et (3).

e) Sur un schéma représentant les trois zones, représenter par des flèches bien orientées le déplacement des deux frontières. Vers que état final le système évolue-t-il ?

Données numériques

— Accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\text{m.s}^{-2}$

— Masse volumique de l'eau $\rho_e = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$

— Constate de Boltzmann $k_B = 1{,}38.10^{-23}\,\text{J.K}^{-1}$.

Thermique en symétrie sphérique

d'après CCP

A. Équation de diffusion et résolution

Soit un corps homogène illimité de masse volumique μ, de coefficient thermique massique c_p et de conductivité thermique λ. Ces coefficients sont supposés indépendants de la température. On étudie un régime dans lequel la température T ne dépend que du temps t et de la distance r à l'origine de cette boule. Le mécanisme de conduction thermique est seul en jeu.

1. En procédant à un bilan thermique, démontrer que T obéit à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

en donnant l'expression de D.
Vérifier que l'on obtiendrait la même équation en utilisant directement l'équation de la diffusion thermique et en consultant un formulaire d'analyse vectorielle.

2. On recherche une solution de la forme

$$T(r,t) = A(n\pi Dt)^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{nDt}\right) \quad .$$

où n est entier et A une constante réelle. Montrer que cette solution convient et donner la valeur de n.

3. Cette solution correspond à une concentration initiale d'énergie interne au voisinage du point O. Représenter l'évolution dans le temps de $T_O(t) = T(0,t)$.

4. Déterminer le rayon $R(t)$ de la sphère, centrée sur l'origine O, contenant les points dont la température est supérieure où égale à $T_0(t)/2$. Quelle loi familière retrouve-t-on ?

B. Refroidissement d'une boule immergée

Une boule chaude homogène de rayon R_s formée du matériau précédent est plongée dans un fluide plus froid, illimité, dans lequel la convection assure le maintien, au voisinage de la surface de la boule, d'une température constante T_e. On note $T_S(t) = T(R_s^-,t)$ la température interne près de la surface de la boule. On admet que les pertes thermiques à sa surface vers le milieu extérieur vérifient

$$\psi_s(t) = h(T_s(t) - T_e)$$

où h est un coefficient et ψ_s la puissance quittant la sphère par unité de surface. On veut déterminer une constante de temps τ caractérisant la mise en équilibre thermique de la boule avec le thermostat fluide.

1. Dans un premier temps, on suppose λ infini, ce qui conduit à négliger les gradients de température dans la boule et à y supposer la température T uniforme. Déterminer son évolution dans le temps et trouver l'expression de τ en fonction de h, R_s, μ et c_p.

2. Dans un second temps, on suppose au contraire h infini de sorte que $T_S(t) = T_e$. La thermalisation de boule est alors pilotée par la conduction thermique en son sein. En utilisant les résultats de la partie A, donner l'ordre de grandeur de τ.

3. Dans la suite on considère un régime intermédiaire dans lequel la conduction dans la boule et la convection près de sa surface interviennent de manières comparables. Quelle équation vérifie $T(r,t)$ pour $r < R_s$?

4. Dans cette équation on effectue le changement de variable $\theta(r,t) = T(r,t) - T_e$. Écrire l'équation aux dérivées partielle dont θ est solution.

5. On cherche une solution de la forme $\theta(r,t) = f(r)g(t)$ où $f(r)$ et $g(t)$ sont supposées partout non nulles. Montrer que

$$\frac{D}{f(r)}\left[\frac{2}{r}f'(r) + f''(r)\right] = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

Justifier [1] que la fonction $g(t)$ ainsi obtenue décroît exponentiellement avec le temps sous la forme $g(t) = g(0)\exp(-t/\tau)$.

1. Indication : soit $u(x)$ et $v(y)$ deux fonctions de x et de y telles que $\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d],\ u(x) = v(y)$. Alors u et v sont égales à une seule et même fonction constante.

6. Rechercher f sous la forme

$$f(r) = \frac{\sin(\alpha r)}{r} \quad .$$

Exprimer α en fonction de D et τ. Quelle est la limite de f lorsque r tend vers 0 ?

7. Quelle condition de bord s'applique à la fonction θ en $r = R_s$? Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme

$$1 - \frac{x}{\tan(x)} = Nu \tag{1}$$

où $x = \alpha R_s$ et où Nu représente le nombre de Nusselt : $Nu = \frac{hR_s}{\lambda}$. Quelles sont les dimension de x et de Nu ?

8. Au voisinage de 0, $1 - x/\tan(x) = x^2/3 + o(x)$. Par une étude graphique, montrer qu'il existe toujours une racine positive à l'équation obtenue à la question précédente.

9. Soit x_0 la plus petite des racines de l'équation (1). Cette valeur contrôle le comportement de la sphère aux temps longs. Exprimer, en faisant intervenir x_0, le temps τ caractéristique du refroidissement de la boule.

10. Montrer que

$$\tau = \frac{R_s^2}{3DNu} \quad \text{si} \quad Nu \ll 1 \tag{2}$$

$$\tau = \frac{R_s^2}{\pi^2 D} \quad \text{si} \quad Nu \gg 1 \quad . \tag{3}$$

Commenter ces résultats en lien avec ceux de B.1 et B.2. Quel est, dans chaque cas, le phénomène qui détermine le temps de thermalisation ?

11. Calculer numériquement τ pour une sphère de plomb caractérisée par les grandeurs suivantes : $h = 5{,}8\,\mathrm{W.K^{-1}.m^{-2}}$, $R_s = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $c_p = 130\,\mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$, $\mu = 1{,}13.10^4\,\mathrm{kg.m^{-3}}$, $\lambda = 35\,\mathrm{SI}$.

Combustion d'une poutre

Centrale-Supélec

Le préambule de la question 14 évoque l'approximation des régimes stationnaires (ARQS), concept que nous n'avons pas vu en cours. L'ARQS s'applique à des situations où la température dépend du temps. Elle consiste à considérer que l'on peut calculer la température à chaque instant t_0 comme si un régime stationnaire était établi, avec des conditions de bord fixées, égales à celles qui prévalent à l'instant t_0.

Q 10. Citer les trois modes de transfert thermique et donner leurs spécificités.

Q 11. Indiquer le rôle de chacun de ces modes dans la propagation d'un incendie.

On s'intéresse à l'avancée du front de combustion, au cours du temps, d'une poutre qui entre en combustion par l'une de ses extrémités. On fait l'hypothèse que les transferts thermiques dans le bois sont de nature purement diffusive.

La poutre en combustion est un parallélépipède, infiniment long dans la direction (Ox). La température sur une section transverse d'aire S de la poutre est supposée uniforme. On note $T(x,t)$ la température à l'abscisse x de la poutre à un instant t. On suppose que le feu prend à l'une de ses extrémités d'abscisse nulle à un instant pris comme origine des temps ($t = 0$). À un instant t ultérieur, on estime, dans ce modèle simple, que la poutre peut-être découpée en trois zones (figure 2) :

— la zone ayant brulé entre l'instant initial et l'instant t, dont la température est supposée constante et égale à la température T_c, dite température de combustion, $T_c = 720\,\mathrm{K}$;

— une zone dans laquelle se déroule la combustion ;

— la zone encore inaltérée.

On note $x_1(t)$ l'abscisse de la frontière entre la zone brulée et la zone de combustion et $x_2(t)$ l'abscisse de la frontière entre la zone de combustion et la zone inaltérée. Loin de $x_2(t)$, la température est supposée constante et égale à $T_\infty = 320\,\mathrm{K}$.

La température $T(x,t)$ dans la zone en combustion et celle de la zone inaltérée augmentent par diffusion au cours du temps jusqu'à atteindre les températures de combustion T_c et d'inflammation du bois $T_i = 520\,\mathrm{K}$, conduisant à l'avancement des frontières x_1 et x_2 au cours du temps. Ainsi, tant que la poutre n'a pas fini de bruler, on a toujours $T(x_1(t),t) = T_c$ et $T(x_2(t),t) = T_i$.

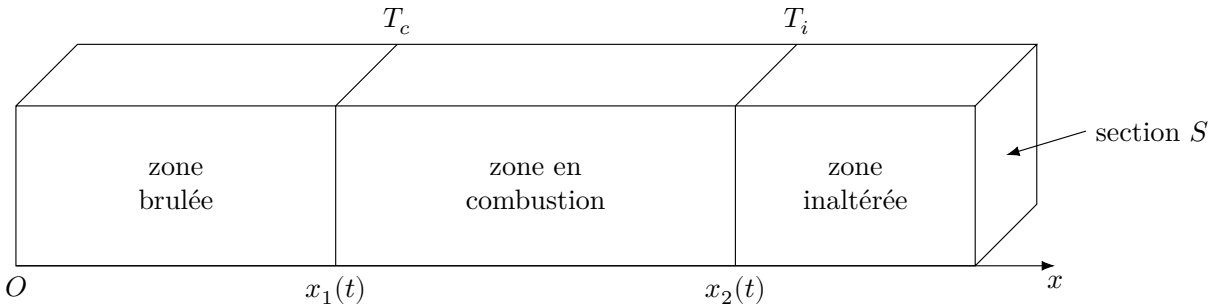


Figure 2 Schéma de la poutre à l'instant t

Les valeurs des conductivités thermiques, notées λ, et des diffusivités thermiques, notées D, du charbon et du bois étant relativement proches, nous considérerons qu'elles sont égales dans les trois zones. Nous prendrons comme valeur de la diffusivité thermique $D = 1{,}0 \times 10^{-7}$ m^2·s^{-1}. On rappelle que la diffusivité thermique d'un matériau est le rapport entre sa conductivité thermique et sa capacité thermique volumique à pression constante.

On note c_p la capacité thermique massique à pression constante du bois dans la zone de combustion, μ sa masse volumique et P_c la puissance thermique massique correspondant à l'enthalpie de réaction de combustion par unité de masse de bois et par unité de temps. On donne $P_c = 4{,}0 \times 10^3$ W·kg^{-1} et $c_p = 2{,}0 \times 10^3$ J·K^{-1}·kg^{-1}.

Q 12. Effectuer un bilan d'enthalpie sur un élément de longueur dx de poutre de bois de section S compris entre x et $x + \mathrm{d}x$, dans la zone de combustion. En supposant la loi de Fourier applicable, en déduire l'équation régissant l'évolution de la température $T(x,t)$ dans la zone de combustion. Mettre cette équation sous la forme

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \kappa$$

en précisant les expressions de D et κ en fonction des données du problème.

Q 13. De même, écrire l'équation régissant l'évolution de la température $T(x,t)$ dans la zone non altérée.

On souhaite dans un premier temps vérifier si l'on peut se placer dans le cadre simplifié de l'approximation des régimes quasi stationnaires thermiques.

Q 14. Calculer la durée caractéristique τ_d de diffusion thermique pour une longueur d'une dizaine de centimètres d'un tronçon de poutre. Comparer ce temps de diffusion à l'ordre de grandeur de la durée τ_c de combustion d'une même longueur de poutre. Conclure.

On se propose de résoudre les équations précédentes sous forme d'une onde se propageant dans la poutre. On pose $u = x - ct$ où c est une constante positive et on effectue le changement de variables tel que $T(x,t) = \theta(u)$.

Q 15. Donner une interprétation de la quantité c.

Q 16. Déterminer les équations différentielles régissant l'évolution de la dérivée de $\theta(u)$ dans la zone inaltérée et dans la zone en combustion.

Q 17. Montrer que la forme générale des solutions $\theta_i(u)$ ($i = 1$, 2 ou 3) dans chacune des trois zones respectives peut s'écrire

$$\begin{cases} \theta_1(u) = a_1 & \text{pour } u < u_1, \\ \theta_2(u) = a_2 + b_2 \exp\left(-\dfrac{c}{D}u\right) - \dfrac{\kappa}{c}u & \text{pour } u_1 < u < u_2, \\ \theta_3(u) = a_3 + b_3 \exp\left(-\dfrac{c}{D}u\right) & \text{pour } u > u_2. \end{cases}$$

Q 18. Déterminer, en justifiant la réponse, les expressions de a_1 et a_3 en fonction des données.

Q 19. Tracer l'allure de la fonction $\theta(u)$ dans la poutre.

Q 20. Quelles conditions permettent d'obtenir les constantes a_2, b_2 et b_3 ? On ne cherchera pas à les expliciter littéralement.

On montre que la constante c est solution de l'équation

$$\frac{c^2}{\kappa D}(T_c - T_\infty) = -\ln\left(1 - \frac{c^2}{\kappa D}(T_i - T_\infty)\right).$$

On se propose de déterminer la valeur de c par une méthode graphique. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est fournie en annexe.

Q 21. Déterminer une valeur approchée de c. Conclure.

Q 22. Estimer la durée de combustion complète d'un mètre de poutre.

Annexe : graphe de la fonction $x \to \ln(1-x)$

