DEVOIR N° 7

Le jeudi 8 octobre, parcours « bleu » et parcours « rouge »

Mesures interférométriques de longueurs d'onde

Mines-Ponts MP 25

En 1907, MICHELSON est le premier américain à recevoir le prix Nobel de physique pour *ses instruments optiques de précision et les mesures spectroscopiques et métrologiques réalisées au moyen de ceux-ci.* En particulier, il publiera en 1892 des mesures relatives aux spectres d'émission de plusieurs sources, obtenues par spectroscopie interférentielle, et notamment pour les raies H_α (rouge) et H_β (bleue) d'émission par les atomes d'hydrogène.

III.A L'interféromètre de Michelson

Le schéma du montage utilisé par MICHELSON est proposé figure 2. Le dispositif monochromateur, formé d'un prisme de verre dispersif et d'une fente étroite, éclaire l'appareil en sélectionnant une raie quasi-monochromatique de longueur d'onde λ_0, appartenant au domaine visible. L'observation est réalisée au moyen d'un oculaire afocal, réglé à l'infini : il donne d'un objet situé à grande distance une image également à grande distance, mais agrandie.

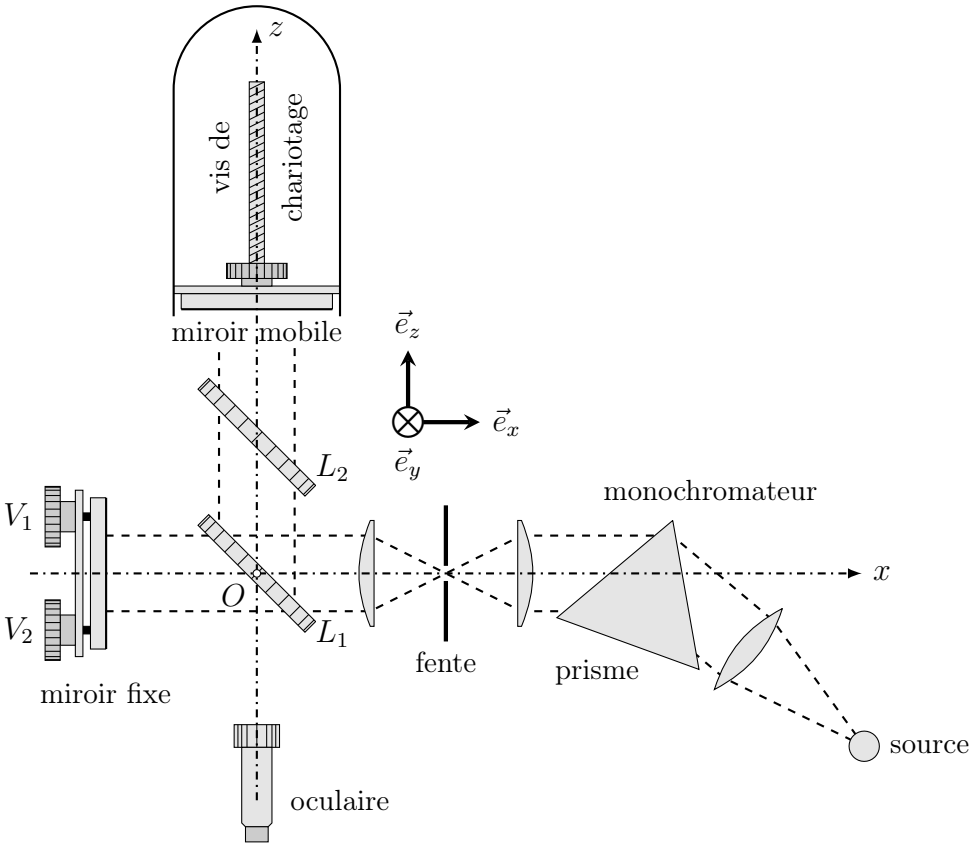


FIGURE 2 – Dispositif de mesure en spectroscopie interférentielle

❑ − **9**. L'interféromètre comporte deux lames de verre L_1 et L_2, parallèles, de même épaisseur e et de même indice optique n, inclinées d'un angle $\pi/4$ relativement à l'axe $(O, \vec{e}_x)$ normal au miroir fixe. La lame L_1 est munie d'une couche semi-réfléchissante sur *une seule* de ses faces ; laquelle ? Justifier, en vous appuyant sur un schéma.

❏ – **10**. Après réglage des vis V_1 et V_2 les miroirs fixe et mobile sont rendus rigoureusement perpendiculaires ; l'axe optique $(O, \vec{e}_z)$ de l'oculaire est alors confondu avec la normale au miroir mobile et l'opérateur observe, au moyen de cet oculaire réglé à l'infini, des franges d'interférence. Quelle est la forme de ces franges ?

Peut-on encore les observer si l'oculaire est déréglé ?

❏ – **11**. Tout en observant les franges, l'observateur peut actionner la vis micrométrique et déplacer le miroir mobile dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, le long de l'axe $(O, \vec{e}_z)$. Relier le nombre ΔN de franges sombres qui défilent au centre du champ et le décalage Δz du miroir mobile.

❏ – **12**. Exprimer, au moyen d'un schéma approprié, la différence de marche observée à l'infini dans une direction donnée, en fonction de l'écart séparant les deux miroirs.

Le déplacement maximal de la vis micrométrique à partir du contact optique est noté $\Delta z_{\max}$. Déterminer, après ce déplacement, l'angle $\Delta\theta$ qui sépare le centre de la figure de la première frange de même nature.

❏ – **13**. Dans le cas d'une des raies de l'hydrogène atomique, on observe le défilement de $N = 3\,156$ franges pour un décalage $\Delta z = 1\,035 \pm 2\,\mu\text{m}$. S'agit-il de la raie H_α ou H_β ?

Avec quelle précision relative mesure-t-on sa longueur d'onde λ_0 ?

Que vaut alors $\Delta\theta$? Commenter.

Si vous choisissez le parcours « rouge », ne traitez pas la partie III.B de ce problème et passez directement au suivant.

III.B Cohérence spectrale d'une source

Une source de lumière éclaire avec la même intensité I_0 les deux voies d'un interféromètre ; l'observation est réalisée en un point où la différence de marche est δ.

❏ – **14**. Dans le cas où la source est rigoureusement monochromatique, de longueur d'onde λ_0, exprimer l'intensité $I(\delta)$ en fonction de I_0, λ_0 et δ. Définir et calculer le facteur de contraste C des franges.

Certaines sources lumineuses sont en fait *bichromatiques* : elles émettent deux radiations de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2 et on pose alors $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et $\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$ en admettant toujours $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

❏ – **15**. Pour certaines sources bichromatiques les deux radiations émises sont de même intensité ; c'est le cas des lampes à vapeur de sodium, étudiées notamment par MICHELSON dans les conditions décrites en **III.A**. Expliciter l'intensité I observée en fonction de I_0, de la différence de marche δ, de λ_0 et de $\Delta\lambda$.

Exprimer le facteur de contraste C des franges et montrer comment il permet la mesure de $\lambda_0/\Delta\lambda$.

❏ – **16**. D'autres sources, comme celles émettant la raie H_α de l'hydrogène, peuvent être écrites comme bichromatiques mais les intensités I_1 et $I_2 < I_1$ émises aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont différentes. Pour quelle(s) valeur(s) de δ le facteur de contraste des franges est-il minimal ? Quelle est cette valeur minimale ?

Dans le cas de la raie double H_α, l'écart $\Delta\lambda$ est de l'ordre de $1{,}4\times10^{-11}$ m. Est-il possible de le mettre en évidence avec le montage proposé ci-dessus ?

Observation des galaxies

Mines-Ponts MP 26

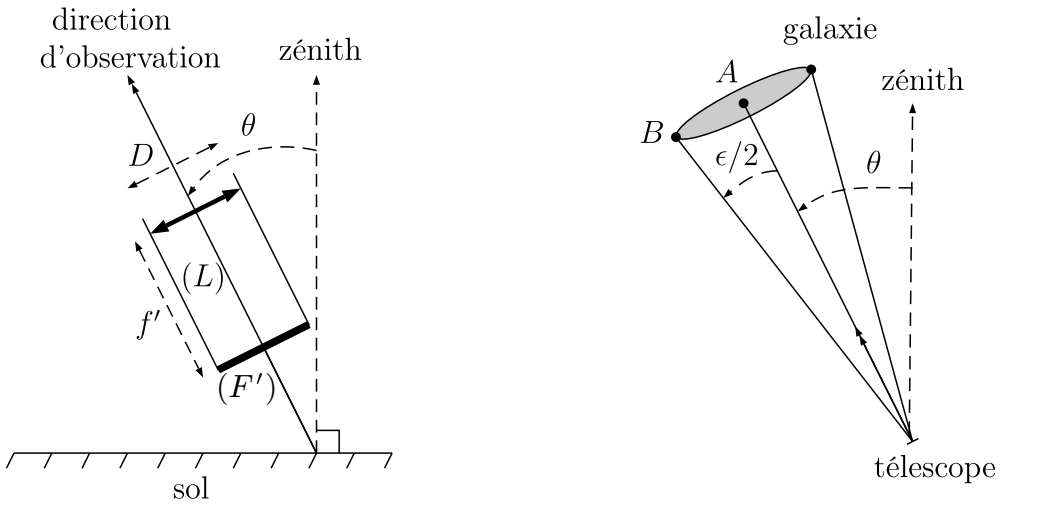
Pour étudier les détails d'une galaxie, il est nécessaire d'avoir des dispositifs d'observation de grande sensibilité (choix du capteur, quantité de lumière récoltée) avec une résolution angulaire qui soit la plus petite possible.
Dans toute la suite, on étudie des ondes lumineuses monochromatiques, de longueur d'onde $\lambda_0 = 2{,}0\,\mu\text{m}$, dans un milieu assimilé au vide.

❑ **– 1.** Dans quel domaine spectral se situent ces ondes ?

I.A Télescope unique

La plupart des grands télescopes sont aujourd'hui constitués de miroirs paraboliques, avec des diamètres de plusieurs mètres. Néanmoins, pour en modéliser le fonctionnement, tant en optique géométrique qu'en optique ondulatoire, il est équivalent de représenter un tel télescope par une lentille convergente (L) de distance focale f' et de diamètre D ; l'observation se fait alors dans le plan focal image (F') de (L), par une caméra numérique.

La figure 1(a) représente l'ensemble des éléments de ce télescope orientable, dont la direction d'observation fait un angle θ avec la direction verticale (zénith).



(a) Représentation d'un télescope unique

(b) Observation d'une galaxie

FIGURE 1 – Modélisation du dispositif

On étudie d'abord un télescope unique du point de vue de l'optique géométrique. Il pointe une galaxie (assimilée à un disque d'éclairement uniforme) dans sa direction d'observation θ, c'est à dire que son axe optique vise le centre A de la galaxie. Cette galaxie est vue sous un angle $\epsilon \ll 1$.

Pour comprendre les limites de résolution du télescope, on réduit la galaxie à deux de ses points (figure 1(b)) :

— son centre A dans la direction de l'axe optique ;

— un point B au bord de la galaxie dans la direction $\epsilon/2$ par rapport à l'axe optique.

Pour les besoins de la représentation, sur la figure 1(b), ϵ n'est pas très petit devant 1 ; cette représentation ne doit donc pas faire oublier que tous les rayons issus d'un point donné de la galaxie arrivent parallèlement entre eux au niveau du télescope.

❑ **– 2.** Construire les images géométriques A' et B' des points A et B.

Quelle est la distance entre ces deux images ?

Sachant que le capteur est constitué de cellules CCD distantes de a, quelle est la résolution angulaire r_{cap} de ce capteur, c'est-à-dire la plus petite valeur ϵ qu'il peut détecter, en fonction de a et f' ?

En pratique, du fait du phénomène de diffraction à l'entrée du télescope (diamètre D, comme la lentille), les images A' et B' ne sont pas ponctuelles, mais sont des tâches circulaires centrées sur les images géométriques de A et B.

❑ **– 3.** Quelle est, en ordre de grandeur, l'ouverture angulaire de chaque tâche de diffraction, à exprimer en fonction de λ_0 et D ?

On considère qu'on peut distinguer deux points si la distance entre leurs images géométriques est supérieure à la taille caractéristique d'une tâche. En déduire la résolution angulaire due à la diffraction r_{diff} du télescope, en fonction de λ_0 et D.

Pour de grands télescopes, on peut donner les ordres de grandeur suivants : $a = 1{,}0\,\mu\text{m}$ et $f' = 10\,\text{m}$.

❑ **– 4.** Considérant les deux questions précédentes, et les valeurs de a, f' et λ_0 fixées, proposer une expression littérale du diamètre $D_{\max}$ du télescope au-delà duquel sa résolution n'augmente pas.

Effectuer l'application numérique pour les ordres de grandeur proposés. Commenter.

I.B Association de 2 télescopes

Depuis plusieurs décennies, l'association de télescopes en systèmes interférentiels permet d'améliorer significativement la résolution angulaire en comparaison d'un télescope unique. C'est un tel système, l'*Event Horizon Telescope*, qui a permis, en avril 2019, de fournir la première « image » d'un trou noir situé au centre d'une galaxie situé à 53 millions d'années lumières de la notre, puis, en 2022, celle du trou noir situé au centre de la Voie lactée.

On considère dans la suite l'association de deux télescopes (T_1) et (T_2) dont les axes optiques pointent dans la même direction θ.

La première sous-partie détaille l'élaboration d'un système interférentiel équivalent aux deux télescopes, tandis que la seconde, très indépendante de la précédente, en exploite le principe de fonctionnement.

I.B.1 Élaboration d'un modèle équivalent

Les deux faisceaux lumineux issus des deux télescopes sont guidés par un système de miroirs et recombinés (superposés), voir figure 2, en une seule figure d'interférence.
Ces deux télescopes, identiques à celui étudié précédemment, sont représentés très schématiquement. Sur la figure 2, la distance au sol entre les deux télescopes (distance de base) est notée b_0.

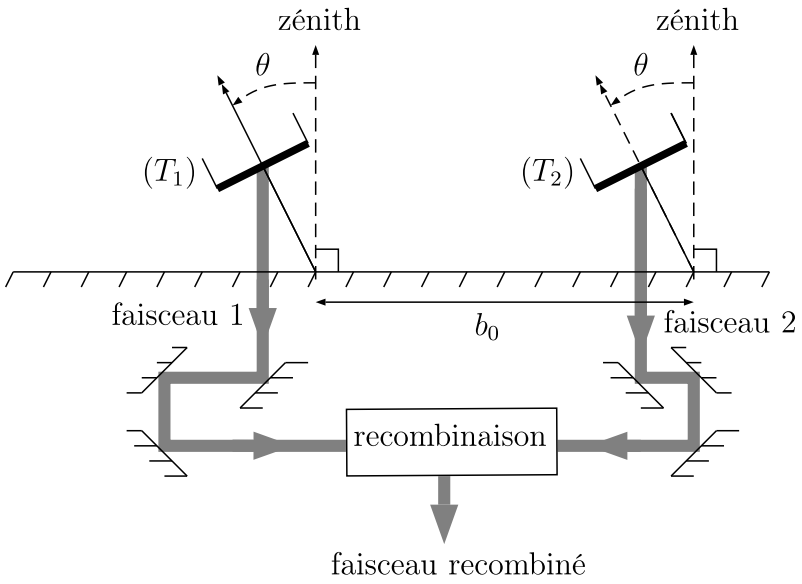


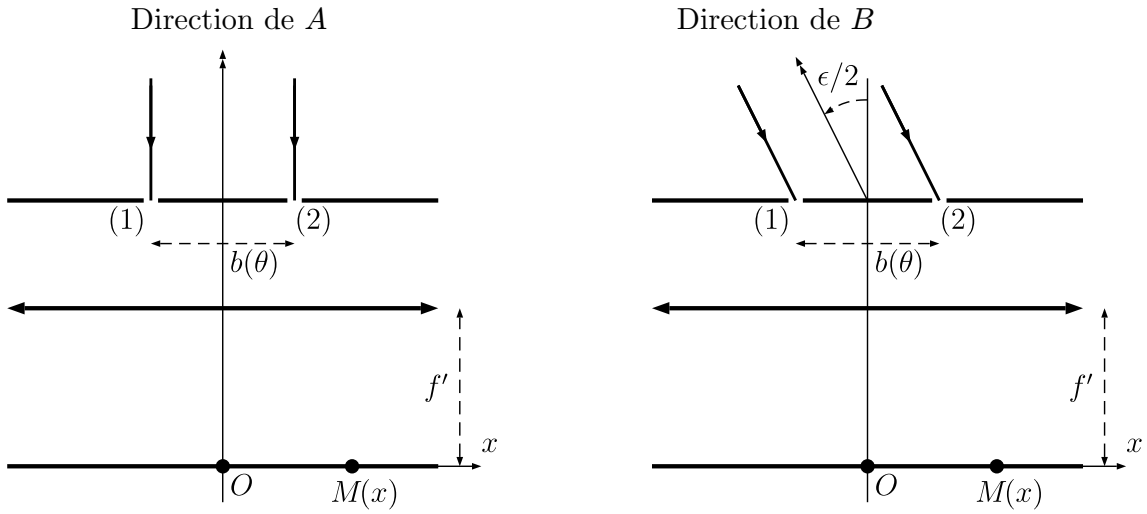
FIGURE 2 – Représentation d'un télescope double

❑ – **5.** On considère deux rayons issus d'une même source ponctuelle à l'infini dans la direction θ et confondus avec les axes optiques des télescopes. À l'aide d'un schéma, exprimer la différence de marche $\delta_0(\theta)$ entre ces deux rayons, à leur entrée dans les télescopes.
La distance b_0 peut valoir plusieurs centaines de mètres, expliquer pourquoi il est nécessaire que le système de miroirs mobiles menant les faisceaux au dispositif de recombinaison compense cette différence de marche.

❑ – **6.** Montrer par un schéma que la distance entre les deux axes optiques des télescopes, nommée distance de base équivalente, est $b(\theta) = b_0 \cos(\theta)$.
Les télescopes actuels étant capables de pointer en permanence vers un même astre, expliquer pourquoi la distance de base équivalente est considérée comme un paramètre variable.

I.B.2 Étude du système équivalent

On suppose que la différence de marche $\delta_0(\theta)$ est désormais parfaitement compensée, à tout instant.
Les deux télescopes (T_1) et (T_2) peuvent être représentés par un système simplifié de deux fentes de Young (1) et (2) distantes de $b(\theta)$ devant une lentille convergente de distance focale f'.
L'observation se fait dans le plan focal image de cette lentille. Le système équivalent est alors présenté en figure 3, sur laquelle sont représentées deux situations, correspondant à l'observation de deux sources ponctuelles A (centre de la galaxie) et B (bord de la galaxie) à l'infini, supposées de même intensité : l'une dans la direction de l'axe optique, et l'autre dans une direction faisant un angle $\epsilon/2$ avec cet axe.



(a) Rayons issus de A (b) Rayons issus de B

FIGURE 3 – Représentation schématique d'un télescope double

❑ **– 7.** En ayant recours à une construction des rayons issus de A et interférant en $M(x)$, exprimer $p_A(x)$ l'ordre d'interférence en $M(x)$ en fonction de λ_0, x, f' et $b(\theta)$.
Montrer que l'intensité lumineuse dans le plan d'observation se met sous la forme $I_A(x) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi b(\theta)x}{\lambda_0 f'}\right)\right]$.
Que représente I_0 ?
Décrire l'allure de la figure d'interférence : formes des franges, interfrange, contraste.
Dans quelle mesure le contraste et l'interfrange dépendent-ils de $b(\theta)$?

❑ **– 8.** Exprimer de la même manière $p_B(x)$, l'ordre d'interférence en $M(x)$ pour les rayons issus de B.
Pourquoi la figure d'interférence obtenue par la présence simultanée de A et B est la superposition des deux figures ?
En déduire pour quelles valeurs de $b(\theta)$ il y a brouillage des franges.

❑ **– 9.** Quelle est la plus petite valeur de $b(\theta)$ permettant d'annuler le contraste ?
Comment utiliser la figure d'interférence pour mesurer la taille d'une galaxie, en supposant connue sa distance au télescope ?

❑ **– 10.** Sachant que $b(\theta)$ peut varier entre les valeurs extrémales 0 et b_0, déterminer la résolution angulaire r_{double} d'un tel télescope en fonction de λ_0 et b_0.
Pourquoi dit-on qu'un tel télescope est équivalent à un unique télescope de diamètre b_0 ?
Effectuer l'application numérique de r_{double} pour $b_0 = 1$ km.

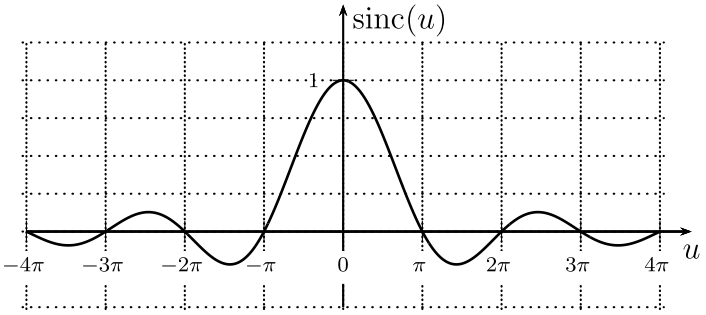
❑ **– 11.** Néanmoins, pourquoi un tel télescope double ne permet-il pas l'observation d'objets moins lumineux, comme le ferait un télescope unique de diamètre b_0 ?

On considère désormais l'ensemble de la galaxie : son centre est pointé par l'axe optique du télescope. Les étoiles de la galaxie vues sous les angles de α à $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ génèrent une intensité lumineuse $\mathrm{d}I_{\text{gal}}(x) = \Gamma \mathrm{d}\alpha\left\{1+\cos\left[\frac{2\pi b(\theta)(x/f'+\alpha)}{\lambda_0}\right]\right\}$, avec Γ une grandeur constante.

❑ **– 12.** Déterminer l'intensité totale de $I_{\text{gal}}(x)$ résultante, en faisant apparaître la fonction sinus cardinal définie en annexe.
En déduire l'expression du contraste de la figure d'interférence obtenue en fonction de $b(\theta)$, en tracer l'allure, et commenter.
Qu'est-ce qui permet de distinguer une galaxie d'une étoile double, qui se réduirait à deux points sources vus sous un angle $\epsilon/2$?

Formulaire

- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- Fonction sinus cardinal définie sur $\mathbb{R}$: $\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(u)}{u}$



Turbine à gaz

Centrale PSI 25

Cet extrait de problème étudie une turbine à gaz installée dans la centrale électrique DK6, située près de Dunkerque. Elle est alimentée par de la vapeur d'eau sous haute pression et haute température, qui se détend à travers différents étages en provoquant la rotation d'un axe entraînant un générateur électrique G de puissance électrique nominale égale à 230 MW. On cherche dans cette partie à évaluer précisément la puissance mécanique transmise par le fluide à l'arbre de la turbine et à comprendre le rôle des différents étages de détente.

La centrale électrique DK6 utilise un circuit de vapeur sèche traversant successivement une turbine haute pression (THP), un surchauffeur (SC), une turbine moyenne pression (TMP) et une turbine basse pression (TBP). Les turbines sont supposées parfaitement calorifugées et alignées sur le même axe de rotation. Pour éviter tout phénomène de corrosion, il ne doit jamais exister de liquide dans les turbines. En sortie de la turbine basse pression, le fluide, alors sous forme de vapeur juste saturante, traverse de façon isobare un condenseur (C) à circulation d'eau de mer. Le schéma de la figure 4 présente quelques caractéristiques de la vapeur aux différents points notés A, B, C, D et E du circuit. Le débit massique de vapeur dans le circuit doit être contrôlé et vaut $D_m = 534.10^3\,\mathrm{kg.h^{-1}}$. Le sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie et contenant le graphe de l'enthalpie massique de l'eau en fonction de son entropie massique, appelé diagramme de Mollier, sur lequel figurent également les courbes isobares, isothermes, isotitres et la courbe de saturation du mélange liquide-vapeur. La centrale est étudiée en régime stationnaire. Les données numériques sont regroupées à la fin de l'énoncé.

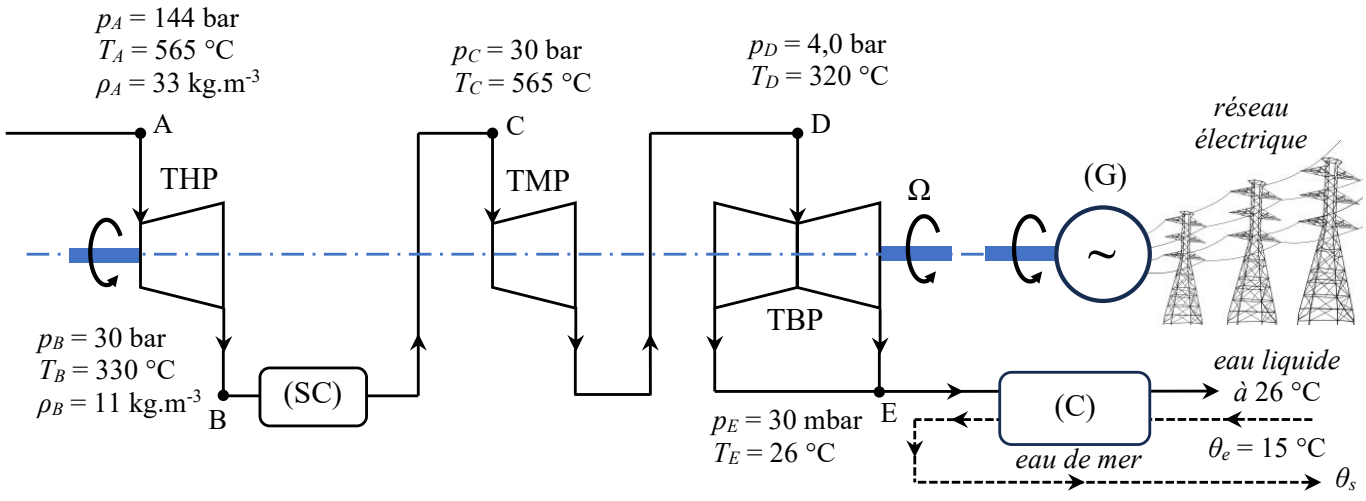


Figure 4 – Circuit de vapeur dans les turbines

Q. 11 Placer les points A, B, C, D et E - dont la pression et la température sont données sur la figure 4 - sur le diagramme de Mollier du document réponse et représenter l'évolution de la vapeur dans le circuit depuis l'entrée de la turbine haute pression jusqu'à la sortie de la turbine basse pression.

Q. 12 La vapeur entre dans un premier temps dans la turbine haute pression. Montrer en utilisant le diagramme de Mollier que la détente à travers la turbine haute pression peut être considérée comme isentropique. Déterminer la température que l'on obtiendrait en sortie de la turbine haute pression si la vapeur était un gaz parfait. Discuter la validité de l'hypothèse du gaz parfait dans ces conditions.

Q. 13 *Pour traiter cette question, il faut utiliser un résultat que nous verrons prochainement dans le cours de mécanique des fluides. Soit un fluide de masse volumique ρ s'écoulant à la vitesse v dans une canalisation de section S. Son débit massique est donné par*

$$D_m = \rho S v \quad .$$

Dans la turbine haute pression, l'écoulement se fait entre des parois solides (certaines mobiles) au travers d'une section $S = 8{,}15.10^{-2}\,\mathrm{m}^2$. Déterminer l'expression puis la valeur de la vitesse débitante v_A de la vapeur à l'entrée de la turbine haute pression. En déduire la valeur de la vitesse v_B en sortie si la turbine gardait un diamètre constant. Justifier la nécessité de conserver une vitesse débitante à peu près constante dans la turbine. Indiquer comment réaliser cette condition en pratique.

Q. 14 Évaluer la puissance mécanique transmise à l'axe de rotation par la vapeur d'eau dans la turbine haute pression.

Q. 15 Calculer la puissance mécanique maximale transmise à l'axe de rotation si l'on utilisait une unique turbine réalisant une détente isentropique jusqu'à la pression la plus basse compatible avec le bon fonctionnement de la machine.

Q. 16 Afin d'augmenter la puissance transmise à l'axe, on utilise à la fois un surchauffeur, qui permet de réchauffer la vapeur, et plusieurs turbines. Déterminer la puissance thermique fournie par le surchauffeur, puis calculer la puissance mécanique totale transmise à l'axe de rotation en considérant l'ensemble des trois turbines. Commenter la valeur numérique obtenue.

Q. 17 Dans la turbine moyenne pression (et à plus forte raison dans la turbine basse pression), la pression plus faible de la vapeur impose d'avoir des aubes plus grandes [1] , ce qui augmente la surface de contact avec le fluide. Estimer la puissance mécanique transmise à l'arbre de la turbine moyenne pression si l'évolution de la vapeur était adiabatique et réversible avec la même pression de sortie $p_D = 4\,\mathrm{bar}$. En déduire la puissance des pertes introduites par les frottements sur les aubes, que l'on appelle pertes adiabatiques. Calculer la création d'entropie massique associée à ces phénomènes.

Le condenseur en sortie de la turbine basse pression utilise une circulation d'eau de mer avec un débit volumique constant $Q = 33 \times 10^3\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{h}^{-1}$. L'eau de mer est prélevée à une température moyenne $\theta_e = 15°\mathrm{C}$, puis rejetée en milieu naturel. La réglementation impose de rejeter l'eau de mer avec une température maximale de 30°C pour ne pas perturber les écosystèmes marins. On suppose que toute la vapeur sortant de la turbine se liquéfie de manière isobare dans l'échangeur thermique parfaitement calorifugé.

Q. 18 Établir la relation donnant la température θ_s de l'eau de mer rejetée par le condenseur en fonction des données utiles. Calculer θ_s puis commenter la valeur numérique obtenue.

Les deux questions qui suivent portent sur la turbine haute pression. Elle est composé de plusieurs parties, et la première d'entre elles est un stator, qui ne comporte pas de pièce mobile mais agit comme une tuyère en augmentant la vitesse de la vapeur de la valeur v_A (à l'entrée) à la valeur v_1. Ce n'est que dans un second étage que la vapeur met en rotation une roue à aubes. Dans cette turbine, l'écoulement supposé stationnaire se fait dans une couche de faible épaisseur $a = 41\,\mathrm{mm}$ et on admet que la vapeur se comporte comme un gaz parfait en évolution isentropique.

Q. 19 Donner un argument permettant de justifier le caractère adiabatique du passage dans le stator. *Pour les 5/2 seulement* : En introduisant les grandeurs pertinentes, donner un critère quantitatif dont l'évaluation numérique permettrait d'étayer cet argument. On admettra dans la suite que cette condition est largement vérifiée.

Au cours du passage de la vapeur à travers les aubes fixes du stator du premier étage de détente, la pression du fluide varie de $\Delta p_1 = p_1 - p_A = -7{,}3\,\mathrm{bar}$.

Q. 20 Exprimer, au premier ordre en Δp_1 , la variation de température $\Delta T_1 = T_1 - T_A$ du fluide entre l'entrée et la sortie du stator, puis la calculer numériquement. En appliquant le premier principe des systèmes ouverts

1. L'aube est la partie d'une turbine en forme de cuillère ou de pale sur laquelle s'exerce l'action du fluide moteur.

dans le stator, trouver l'expression puis la valeur numérique de la vitesse v_1 de la vapeur à la sortie du stator du premier étage de détente de la turbine haute pression.

Donnée numériques

- Masse molaire de l'eau : $M = 18{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}$
- Rapport des capacités thermiques de la vapeur d'eau : $\gamma = 1{,}30$
- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_{\mathrm{eau}} = 4{,}18\,\mathrm{kJ\,K^{-1}\,kg^{-1}}$
- Masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{\mathrm{eau}} = 1{,}00 \times 10^{3}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
- Capacité thermique massique à pression constante de la vapeur d'eau (assimilée à un gaz parfait) : $c_p = 2{,}00\,\mathrm{kJ\,K^{-1}\,kg^{-1}}$
- Enthalpie massique de vaporisation de l'eau à $26\,^{\circ}\mathrm{C}$: $l_{\mathrm{vap}} = 2{,}30 \times 10^{3}\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$

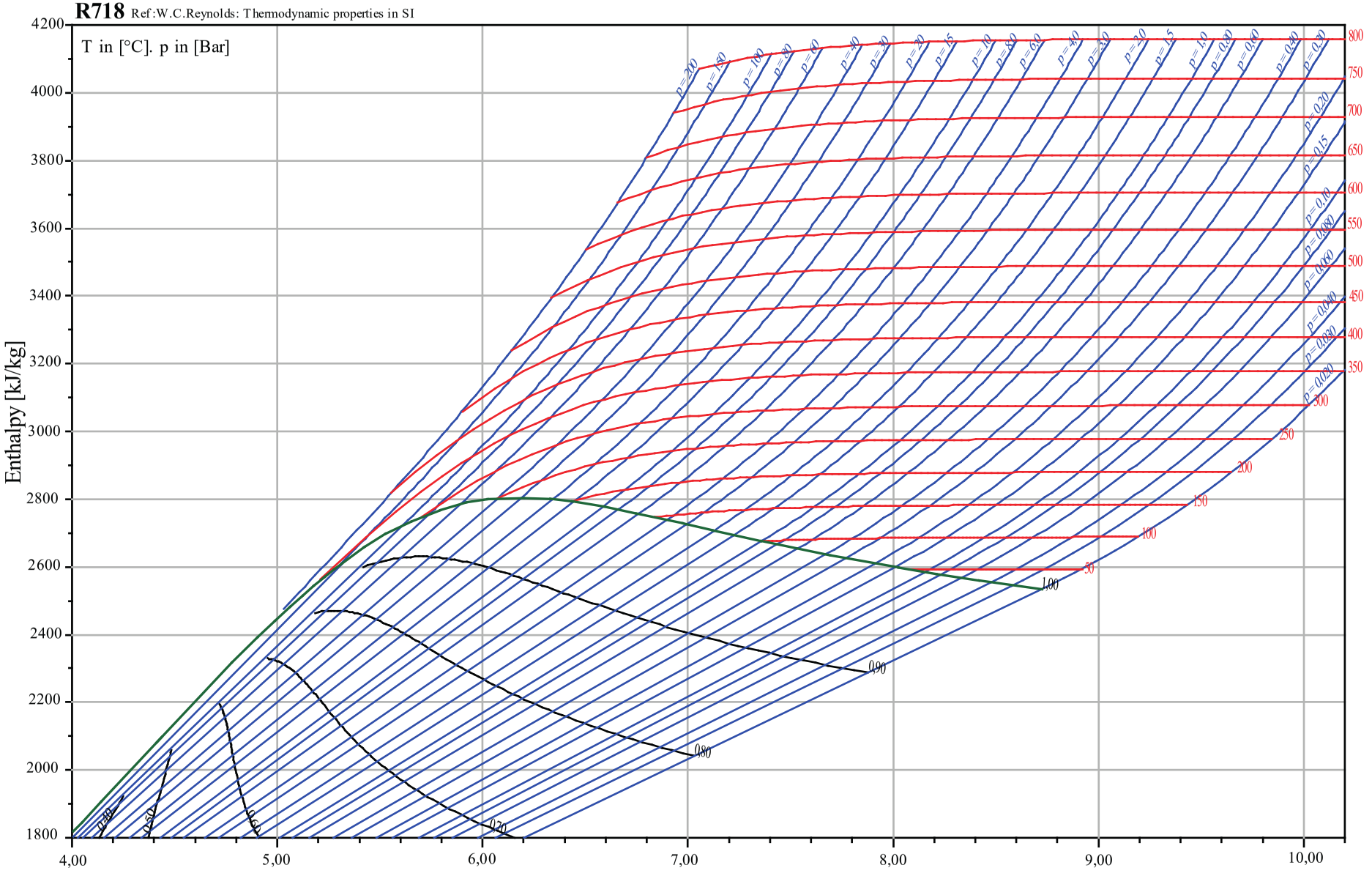


FIGURE 1 – Diagramme de Mollier de l'eau

Détection des ondes gravitationnelles

Concours PT 2020

Une onde gravitationnelle est une oscillation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à grande distance de son point de formation. Albert Einstein a prédit l'existence de telles ondes en 1916 : selon sa théorie de la relativité générale, ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant, ce n'est qu'en 2016 que la confirmation directe des ondes gravitationnelles a été possible grâce à une première observation faite le 14 septembre 2015. Ces observations ont été possibles grâce aux détecteurs interférométriques qui permettent de détecter un déplacement minimal de 10^{-18} m. Nous nous proposons dans ce sujet d'évaluer la sensibilité de l'interféromètre en prenant en compte les limitations imposées par différents processus physiques.

Le principe de l'interféromètre gravitationnel est le suivant. Un faisceau laser ultra-stable est divisé en deux par un miroir semi-réfléchissant. Les faisceaux sortants sont dirigés le long de deux bras perpendiculaires, longs d'environ 3 km, et formés de tubes en acier inoxydable placés sous ultravide et situés dans des tunnels légèrement surélevés. Aux extrémités des bras sont suspendus deux miroirs également maintenus sous ultravide, isolés des perturbations sismiques. Après une série de réflexions successives sur les miroirs afin d'augmenter la longueur de trajet, les faisceaux sont à nouveau combinés sur une table de détection, suspendue et placée elle aussi sous vide. Les deux faisceaux produisent des interférences.

On modélise l'interféromètre réel par un un interféromètre de Michelson (voir figure 1) constitué de deux bras de longueurs respectives $L_x = OA$ et $L_y = OB$ compris entre une séparatrice (Sp) et des miroirs M_x et M_y. Les miroirs sont supposés parfaits et induisent un déphasage à la réflexion de π. La séparatrice sera considérée d'épaisseur nulle *mais est telle que l'une des réflexions sur cette lame se fait avec un déphasage de π sur une face et sans déphasage sur l'autre.* Dans tout le problème, on envisage exclusivement un interféromètre de Michelson en lame d'air.

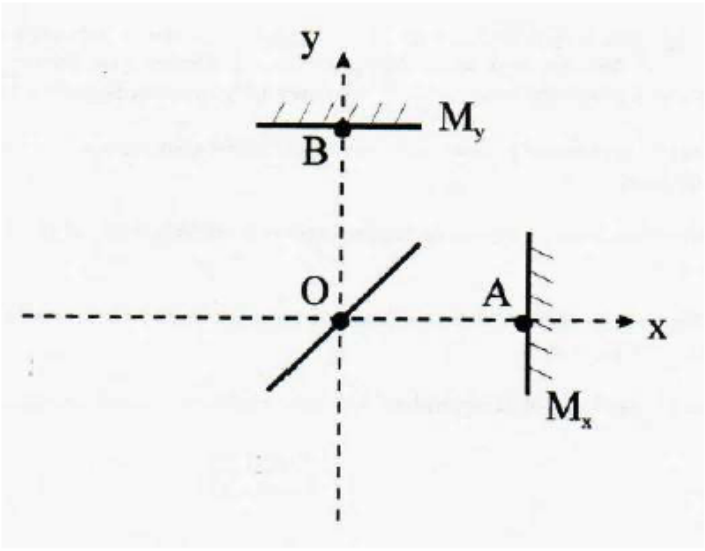


Figure 1

L'interféromètre est éclairé sous incidence normale par une onde incidente monochromatique de longueur d'onde λ, d'amplitude S_0 et d'éclairement E_0, se propageant dans la direction $\vec{u}_x$. On suppose que le long des trajets parallèles à $\vec{u}_x$ (respectivement $\vec{u}_y$), l'indice de réfraction vaut n_x (respectivement n_y) (voir figure 1).

1. La séparatrice étant une lame semi-transparente qui laisse passer 50 % de l'éclairement incident et en réfléchit 50%, quel est l'éclairement obtenu en sortie de l'interféromètre (dans la direction de $-\vec{u}_y$) si on occulte l'un des miroirs ?

2. Exprimer la différence de phase $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$ entre les deux ondes qui interfèrent en sortie de l'interféromètre en fonction de n_x, n_y, L_x, L_y et λ.

3. En déduire l'expression de l'éclairement E_y récupéré en sortie, dans la direction $-\vec{u}_y$.

La théorie de la Relativité Générale prévoit que lors de l'explosion d'une supernovae dans l'amas de la vierge, une onde gravitationnelle de fréquence $f_0 = 1$ kHz, se propageant à la même célérité $c = 3.10^8$ m.s^{-1} que la lumière dans le vide, est émise. Au niveau de l'interféromètre de Michelson, une telle onde provoque une anisotropie de

l'espace, qui prend des propriétés distinctes selon les directions $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, de sorte que l'indice lumineux du vide de la forme :

$$n_x = 1 - \tau \quad \text{ou} \quad n_y = 1 + \tau \quad \text{avec} \quad \tau = \tau_M \cos(2\pi f_0(t - z/c)) \quad \text{et} \quad \tau_M = 10^{-21} \quad .$$

4. Justifier que l'on puisse négliger la dépendance en z de τ à l'échelle de l'interféromètre sachant que l'extension verticale des miroirs ne dépasse pas $D = 1\,\text{m}$.

5. Le temps d'intégration (ou temps de réponse) des détecteurs d'éclairement est pris égal à $T_d = 10^{-4}\,\text{s}$. Justifier que l'on puisse utiliser à chaque instant l'expression de l'éclairement établi à la question 3.

6. Du fait de la faible valeur de τ, on limite dans toute la suite les calculs à l'ordre 1 en τ. Montrer que le rapport de l'éclairement détecté sur l'éclairement incident prend la forme :

$$\frac{E_y}{E_0} = \frac{1 - \cos\varphi_0}{2} + \frac{2\pi(L_x + L_y)\tau(t)\sin\varphi_0}{\lambda} \quad .$$

où φ_0 est à exprimer en fonction de L_x, L_y et λ.

7. La puissance lumineuse étant simplement proportionnelle à l'éclairement, pour quelles valeurs de φ_0 la variation de puissance provoquée par l'onde gravitationnelle est-elle maximale ? Calculer numériquement la variation maximale pour une puissance incidente P_0 égale à 10 W avec $\lambda = 600\,\text{nm}$ et $L_x \simeq L_y \simeq 3\,\text{km}$.

Arrêtez-vous ici si vous choisissez le parcours « bleu ».

On se place dans tout la suite dans le cas où $\varphi_0 = \pi/2$.
La limite ultime de la précision sur la mesure de la variation de puissance en sortie est imposée par l'existence de fluctuations de la puissance moyenne $< P_y >$ mesurée par le détecteur (proportionnelle à E_y).

8. L'onde de puissance moyenne $< P_y >$ est détectée pendant une durée T_d. Sachant qu'elle peut être assimilée à un flux de photons d'énergie hc/λ, où h est la constante de Planck, exprimer le nombre moyen $< N >$ de photons détectés en fonction de T_d, $< Py >$, h, c (vitesse de la lumière dans le vide) et λ.

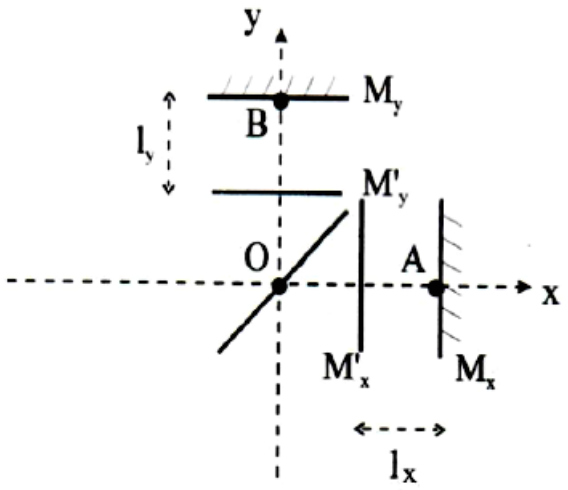
9. Le nombre de photons détectés peut fluctuer de ΔN autour de sa valeur moyenne, et on admet que $\Delta N = \sqrt{< N >}$. Exprimer la fluctuation de puissance moyenne ΔP_y correspondante, *en l'absence de toute onde gravitationnelle*. On donnera la réponse en fonction de h, c, λ, T_d et P_0.

10. L'onde gravitationnelle n'est détectable que si la variation de puissance qu'elle provoque, c'est à dire la quantité $< P_y > (\tau) - < P_y > (\tau = 0)$, est supérieure à la fluctuation de puissance ΔP_y en l'absence d'onde. Montrer que la plus petite valeur de τ_M mesurable est donnée par

$$\tau_{M\,\text{min}} = \frac{1}{2\pi(L_x + L_y)}\sqrt{\frac{hc\lambda}{2P_0T_d}} \quad .$$

Calculer numériquement cette valeur et commenter. On donne $h = 6{,}62.10^{-34}\,\text{J.s}$.

Dans le but d'améliorer le seuil de détection de l'interféromètre, on insère (voir figure ci-dessous) dans chacun de ses bras une lame partiellement réfléchissante M'_x ou M'_y, distante respectivement de l_x du miroir M_x et de l_y du miroir M_y.



11. On s'intéresse tout d'abord à l'ensemble $\{M'_x, M_x\}$. On éclaire le dispositif par une onde incidente d'amplitude complexe $\underline{S}_1$ mesurée juste avant de traverser M'_x pour la première fois. Entre M'_x et M_x, la lumière effectue une série d'aller-retours et on obtient alors une superposition d'ondes réfléchies (par M'_x et M_x). Il ressort de M'_x, dans la direction $-\vec{u}_x$, une superposition d'ondes transmises.

Exprimer le déphasage ψ entre deux ondes successives émergeant de M'_x dans le sens de $-\vec{u}_x$, en fonction de l_x, n_x et λ.

12. En l'absence d'onde gravitationnelle, on souhaite que ces ondes successives soient en phase. En déduire une condition entre l_x et λ.

On peut alors montrer (et on ne cherchera pas à le justifier) que l'onde gravitationnelle traversant $\{M'_x, M_x\}$ subit, à cause de l'onde gravitationnelle, un déphasage donné par

$$\delta\varphi_x = \pi + \frac{4\pi F \tau(t) l_x}{\lambda} \quad \text{avec} \quad F = \frac{1+r}{1-r} \quad .$$

13. En déduire par analogie l'expression du déphasage supplémentaire subi par l'onde traversant $\{M'_y, M_y\}$ (on rappelle que l'onde gravitationnelle rend l'espace anisotrope).

On se place dans le cas où $L_x \simeq l_x$ et $L_y \simeq l_y$. L'interféromètre est toujours éclairé sous incidence normale par une onde incidente monochromatique de longueur d'onde λ, se propageant dans la direction $\vec{u}_x$. Le déphasage des deux ondes est égal à celui qu'elles présentent en l'absence d'onde gravitationnelle (analysé dans la question 2), auquel on ajoute $\delta\varphi_y - \delta\varphi_x$.

14. Expliquer comment est modifiée l'expression (obtenue dans la question 6) de l'éclairement E_y mesuré en sortie de l'interféromètre.

15. On se place toujours à $\varphi_0 = \pi/2$. En déduire que par rapport à l'étude sans les lames M'_x et M'_y, la sensibilité du dispositif est multipliée par un coefficient numérique qu'on déterminera et qu'on évaluera numériquement pour $r = 0{,}995$. Sachant que le bruit est inchangé, conclure sur la faisabilité de la détection d'ondes gravitationnelles d'amplitude $\tau_M = 10^{-21}$.