Échelles de temps, échelles de longueur et ARQS en thermique

Dans un milieu homogène de conductivité thermique λ constante, l'évolution de la température est régie par l'équation de la diffusion

$$\Delta T - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

où $D = \lambda/(\rho c)$ désigne la diffusivité. D'autres phénomènes étudiés dans le programme de PC* obéissent à la même équation et présentent un comportement similaire (diffusion de particules, diffusion visqueuse, pénétration du champ magnétique dans un conducteur ohmique). Dans toutes ces situations, on peut appliquer la loi d'échelle

$$\ell_{\text{diff}} \simeq \sqrt{D\tau_{\text{diff}}} \qquad \text{ou} \qquad \tau_{\text{diff}} \simeq \frac{\ell_{\text{diff}}^2}{\tau_{\text{diff}}} \quad ,$$

expressions dans lesquelles ℓ_{diff} représente une longueur caractéristique et τ_{diff} la durée associée. Ces concepts ont été introduits à partir de diverses considérations :

— analyse dimensionnelle ;

— analyse d'ordres de grandeur dans l'équation de la diffusion ;

— exploitation de solutions exactes de l'équation de la diffusion unidimensionnelle dans lesquelles intervient le quotient sans dimension $x^2/(Dt)$ (diffusion d'un colorant à partir d'un point, choc thermique).

Ces approches fournissent une compréhension intuitive de ce que représentent ℓ_{diff} et τ_{diff}, mais n'en donnent pas de définition claire. Dans chaque situation, il convient de leur attribuer la signification pertinente en faisant preuve de bon sens.

Ce document a pour but d'approfondir ces notions d'échelle de temps et d'échelle de longueur et de les exploiter pour préciser le domaine de validité de l'ARQS dans le cas des phénomènes diffusifs.

I Adimensionnement de l'équation de la diffusion

I.1 Un peu de calcul

L'utilisation de quotients sans dimension est une technique courante lorsqu'on souhaite discuter le comportement d'un système physique selon l'ordre de grandeur de ses paramètres. Considérons un système physique caractérisé par une unique échelle de longueur L. On peut, par analyse dimensionnelle, lui associer le temps $\tau = L^2/D$ (qui ne possède à ce stade pas de signification particulière). On pose

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau} = \frac{Dt}{L^2}$$

qui sont une abscisse adimensionnée et un temps adimensionné ($\tilde{t}$ est parfois appelé nombre de Fourier et noté Fo). Puis on effectue le changement de variable

$$T = T(x,t) = T(\tilde{x},\tilde{t}) = T\left(\frac{x}{L},\frac{t}{\tau}\right) \quad .$$

Cette manière d'écrire propre aux physiciens est trompeuse puisqu'elle confond trois objets mathématiques : d'une part la valeur de la température T, d'autre part la fonction $f : (x,t) \mapsto T$ et enfin la fonction $g : (\tilde{x},\tilde{t}) \mapsto T$. Pour plus de clarté, notons

$$T = f(x,t) \quad \text{et} \quad T = g(\tilde{x},\tilde{t}) \quad \text{et donc} \quad f(x,t) = g\left(\frac{x}{L},\frac{t}{\tau}\right) \quad .$$

Selon la règle de la chaîne, on a

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{x}{L},\frac{t}{\tau}\right) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \tilde{x}^2}\left(\frac{x}{L},\frac{t}{\tau}\right) \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial g}{\partial \tilde{t}}\left(\frac{x}{L},\frac{t}{\tau}\right) \quad .$$

En reportant dans l'équation de la diffusion (1), il vient

$$\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{D\tau}\frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad .$$

Comme $L^2 = D\tau$, les facteurs dimensionnés se simplifient et on obtient

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial g}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad . \tag{2}$$

Si on revient aux notations laxistes des physiciens, on confond la fonction g et la température $T = g(\tilde{x}, \tilde{t})$ pour écrire

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad . \tag{3}$$

Par souci de simplicité, ce calcul a été mené en coordonnées cartésiennes et en dimension 1. En trois dimensions, il suffit d'introduire $\tilde{y} = y/L$, $\tilde{z} = z/L$ et le laplacien adimensionné

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}$$

pour obtenir

$$\tilde{\Delta} T - \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad . \tag{4}$$

Dans la suite, nous noterons $\tilde{M} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ les coordonnées adimensionnées. Selon les circonstances, on raisonne sur un système unidimensionnel (pour alléger) ou tridimensionnel (pour plus de généralité), mais les idées développées sont les mêmes dans les deux cas.

L'équation de la diffusion (1) possède une solution unique si on se donne une condition initiale sur tout le domaine V étudié, ainsi qu'une condition de bord sur les limites spatiales de V (dans la suite, nous notons ∂V l'ensemble des points situés sur le bord de V). Le plus souvent, la température initiale est connue et la température aux bords imposée (mais pas forcément constante). On se donne donc deux fonctions T_{ini} et T_{bord} telles que

$$\forall M \in V,\, T(M,0) = T_{\text{ini}}(M) \qquad \forall M \in \partial V,\, T(M,t) = T_{\text{bord}}(M,t) \quad . \tag{5}$$

Après division des longueurs par L, $\tilde{M}$ parcourt le domaine $\tilde{V}$ de bord $\partial\tilde{V}$ et ces conditions [1] portent sur la fonction g :

$$\forall M \in \tilde{V},\, g(\tilde{M},0) = g_{\text{ini}}(\tilde{M}) \tag{6}$$

$$\forall \tilde{M} \in \partial\tilde{V}, \forall t \in]0,\infty[,\; g(\tilde{M},t) = g_{\text{bord}}(\tilde{M},t) \tag{7}$$

où on a noté

$$T_{\text{ini}}(M) = g_{\text{ini}}(\tilde{M}) \quad \text{et} \quad T_{\text{bord}}(M,t) = g_{\text{bord}}(\tilde{M},t) \quad .$$

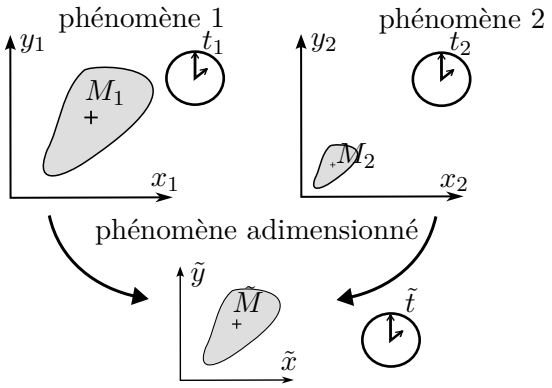
Dès lors, l'équation (4) possède une solution unique sur $\tilde{V}$.

I.2 Conséquence

Considérons deux problèmes de diffusion thermique, l'un caractérisé par la longueur L_1 et le coefficient D_1, l'autre par la longueur L_2 et le coefficient D_2. On suppose que les domaines spatiaux étudiés V_1 et V_2 sont homothétiques l'un de l'autre : à tout point M_1 du premier, on peut associer un point M_2 du second en multipliant toutes les coordonnées par un certain facteur $\alpha = L_2/L_1$. On suppose aussi que les conditions aux limites sont identiques : la températures initiale en M_1 est la même qu'en son image M_2 et, si M_1 et M_2 sont aux bords, leurs températures sont les mêmes [2].

1. Dans le cas plus rare où la densité de flux $\vec{j} = -\lambda\vec{\nabla}T$ est imposée sur ∂V, le passage à la condition de bord pour g est plus délicat. Comme $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}$, $\vec{j}(M,t) = -\frac{\lambda}{L}\vec{\nabla}g(\tilde{M},t)$. Imposer $\vec{j} = \vec{j}_{\text{bord}}$ sur ∂V fixe donc $\vec{\nabla}g(\tilde{M},t) = -\frac{L}{\lambda}\vec{j}_{\text{bord}}(M,t)$ sur $\partial\tilde{V}$.

2. Pour une condition de bord portant sur $\vec{j}$, il convient de transformer $\vec{j}_{\text{bord}}$ pour que $\vec{\nabla}g$ demeure identique et que les deux situations soient équivalentes.



Selon le procédé du paragraphe précédent, on adimensionne le premier problème en introduisant

$$\tilde{M_1} = \frac{M_1}{L_1} \qquad \tau_1 = \frac{L_1^2}{D_1} \qquad \tilde{t_2} = \frac{t_1}{\tau_1}$$

et le second en introduisant

$$\tilde{M_2} = \frac{M_2}{L_2} \qquad \tau_2 = \frac{L_2^2}{D_2} \qquad \tilde{t_2} = \frac{t_2}{\tau_2} \quad .$$

Dans les deux cas, g vérifie l'équation (2). Comme les domaines d'étude V_1 et V_2 sont homotétiques, ils donnent après division par respectivement L_1 et L_2 *le même* domaine adimensionné $\tilde{V}$ et donc g vérifie *les mêmes* conditions limites (7) et (6) dans les deux cas. Il existe donc une seule et même fonction g telle que

$$T_1(M_1, t_1) = g(\tilde{x_1}, \tilde{t_1}) = g\left(\frac{x_1}{L_1}, \frac{t_1}{\tau_1}\right) \quad \text{et} \quad T_2(M_2, t) = g(\tilde{x_2}, \tilde{t_2}) = g\left(\frac{x_2}{L_2}, \frac{t_2}{\tau_2}\right) \quad .$$

La température en M_1 à l'instant t_1 est la même qu'en M_2 à l'instant t_2 si

$$(\tilde{x_1}, \tilde{t_1}) = (\tilde{x_2}, \tilde{t_2}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2} \quad \text{et} \quad \frac{t_1}{\tau_1} = \frac{t_2}{\tau_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{L_2}{L_1} x_1 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1} t_1 \quad .$$

Cela signifie que deux problèmes présentent le même comportement à des facteurs d'échelles près : en multipliant les longueurs du premier phénomène par L_2/L_1, et ses durées par τ_2/τ_1, on « voit » exactement le second.

La situation est plus simple à comprendre si les deux situations mettent en jeu le même matériau. Dans ce cas $D_1 = D_2$ et, comme $\tau = L^2/D$,

$$t_2 = \frac{L_2^2}{L_1^2} t_1 \quad .$$

Si les échelles de longueur sont multipliées par le facteur $\alpha = L_2/L_1$, les échelles de temps sont mutipliées par α^2. Si on observe le phénomène de diffusion à l'échelle L sur une durée t, on observera le même phénomène à l'échelle $2L$ sur une durée $4t$.

I.3 Exemple illustratif

On considère un matériau de diffusivité D occupant tout l'espace compris entre les plans d'abscisses $x = 0$ et $x = \ell$, initialement porté à la température uniforme T_i. À $t = 0$, on porte brusquement ses deux faces à la température T_1 que l'on maintient constante par la suite. La température dans la couche évolue peu à peu et tend asymptotiquement vers T_1 ; la couche se thermalise avec le thermostat. On cherche $T(x, t)$ pour $t \geqslant 0$ et $x \in [0, \ell]$.

Historiquement, c'est pour résoudre ce problème de Joseph Fourier a introduit les développements en série qui portent aujourd'hui son nom. La solution s'écrit :

$$T(x,t) = T_1 + (T_i - T_1) \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{4}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{4\ell^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad . \tag{8}$$

Ce problème fait intervenir la seule échelle de longueur ℓ. Pour l'adimensionnement, on choisit donc $L = \ell$ puis $\tau = \ell^2/D$. La solution (8) s'écrit

$$T(x,t) = T_1 + (T_i - T_1) \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{4}{n\pi} e^{-\frac{n^2\pi^2\tilde{t}}{4}} \sin(n\pi\tilde{x}) \quad .$$

Conformément à l'analyse générale de la partie I.1, on peut écrire T comme une fonction de x/ℓ et de t/τ. Si on considère deux couches du même matériau, l'une d'épaisseur ℓ_1 et l'autre d'épaisseur ℓ_2, elles possèdent des comportements analogues : on passe de l'évolution dans l'une à celle dans l'autre en multipliant les longueurs pour $\alpha = \ell_2/\ell_1$ et les durées par $\tau_2/\tau_1 = \alpha^2$. Si la seconde couche est deux fois plus épaisse, elle se thermalise quatre fois plus lentement.

I.4 Théorème Π de Vashy-Buckingham

Au lieu de procéder à l'adimensionnement de l'équation de la chaleur, on peut parvenir aux mêmes conclusions en utilisant le théorème de Vaschy-Buckingham (aussi appelé théorème Π). Bien que fondamental pour la pratique de l'analyse dimensionnelle, il ne figure pas au programme de CPGE.

Théorème
Soit un phénomène décrit par n grandeurs physiques $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ qui s'expriment en fonction de k dimensions indépendantes. Il existe $(n-k)$ quotients sans dimension $\{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-k}\}$ formés à partir des p_i, et il existe une fonction $f : \mathbb{R}^{n-k} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$f(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{n-k}) = 0 \quad .$$

Le plus souvent, cette relation détermine implicitement π_1 en fonction de π_2, π_3, ... Dans ce cas, il existe une fonction h telle que

$$\pi_1 = h(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{n-k}) \quad .$$

Appliquons ce théorème à la diffusion thermique. On considère un problème dans lequel intervient une seule échelle de longueur L (si d'autres longueurs interviennent, elles sont les produits de L par des facteurs sans dimension). Pour simplifier, nous supposons que les conditions de bord et les conditions initiales s'expriment en fonction d'une unique température T_0. Pour un problème unidimensionnel, on cherche la température $T(x,t)$ solution de l'équation de la diffusion (1). Les grandeurs physique $\{p_i\}$ qui entrent en jeu ici sont T, x, t, T_0, L et D, donc $n = 6$. Les dimensions qui interviennent dans ces grandeurs sont la longueur, le temps et la température (en unités SI, on a besoin du mètre, de la seconde et du kelvin), donc $k = 3$. On peut donc former 3 quotients sans dimension π_1, π_2 et π_3 et il n'est pas difficile de les trouver :

$$\pi_1 = \frac{T}{T_0}, \quad \pi_2 = \frac{x}{L}, \quad \pi_3 = \frac{tL^2}{D} \quad .$$

Les quotients π_2 et π_3 sont les variables $\tilde{x}$ et $\tilde{t}$ introduites plus haut. D'après le théorème Π, il existe une fonction h telle que

$$\frac{T}{T_0} = g\left(\frac{x}{L}, \frac{tL^2}{D}\right) \quad .$$

Dans un problème tridimensionnel, il faudrait encore introduire $\pi_4 = y/L$ et $\pi_5 = z/L$ et on aboutirait à

$$\frac{T}{T_0} = g\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}, \frac{z}{L}, \frac{tL^2}{D}\right) \quad .$$

Nous retrouvons ainsi les conclusions du paragraphe I.1.

II Nombre de Fourier et régime quasi-stationnaire

II.1 Limite stationnaire de l'équation de la diffusion

On considère un problème de thermique faisant intervenir une échelle de longueur L une échelle de temps τ_c, typiquement un temps caractéristique imposé par les variations temporelles des conditions de bord. Il peut par exemple s'agir de la période d'ondes thermiques ou d'une constante de temps dans le cas d'un pseudo-thermostat au contact de la région étudiée. On note $\tau_{\text{diff}} = L^2/D$ le temps de diffusion associé à la longueur L (à ne pas confondre avec τ_c). On définit le nombre de Fourier Fo par

$$\boxed{\text{Fo} = \frac{\tau_c}{\tau_{\text{diff}}} = \frac{\tau_c D}{L^2}} \quad .$$

Comme dans la première partie, on procède à un changement de variable, mais ici on utilise τ_c pour adimensionner le temps. On pose donc

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau_c} \quad .$$

En utilisant comme plus haut la règle de la chaîne, on réécrit l'équation de la diffusion sous la forme

$$\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{D\tau_c}\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{\text{Fo}}\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = 0.$$

En dimension 3, on aurait bien entendu

$$\tilde{\Delta} T - \frac{1}{\text{Fo}}\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad . \tag{9}$$

En régime stationnaire, T vérifie $\tilde{\Delta} T = 0$. Dans l'équation (9), le second terme exprime donc les effets d'instationnarité. On voit qu'ils tendent à disparaître si $\text{Fo} \to \infty$. Pour bien comprendre, imaginer qu'on considère un système donné et qu'on le soumette à des conditions de bord variant de plus en plus lentement (et/ou qu'on réduise peu à peu sa taille) : on fait ainsi augmenter τ_c (et/ou diminuer L), donc Fo augmente. Dans le même temps, le terme $\frac{\partial T}{\partial \tilde{t}}$ ne change pas puisqu'on adapte l'échelle de temps ; la variable sans dimension $\tilde{t}$ décrit un intervalle inchangé. Dans la limite $\text{Fo} \to \infty$, l'équation (9) devient

$$\tilde{\Delta} T = 0 \quad .$$

À chaque instant t, elle possède une solution unique dès lors qu'on se donne les conditions de bord à t ; les conditions initiales n'interviennent plus. À tout instant, tout se passe comme si le régime était stationnaire ; on dit qu'il est quasi-stationnaire. L'interprétation de ce résultat est la suivante. Les conditions de bord se modifient sur une échelle de temps τ_c, et le temps d'établissement du régime permanent est τ_{diff}. Si $\tau_c \gg \tau_{\text{diff}}$, ce régime peut s'établir pour chaque nouvelle valeur des conditions de bord ; le profil de température s'adapte « en direct ».

Validité de l'ARQS en thermique
Lorsque les conditions de bord évoluent au fil du temps, le régime est quasi-stationnaire si on peut négliger le terme en 1/Fo, c'est à dire si

$$\text{Fo} \gg 1 \qquad \text{ou encore} \qquad \tau_c \gg \tau_{\text{diff}} \quad .$$

II.2 Analyse dimensionnelle

Reprenons l'analyse à partir du théorème de Vaschy-Buckingham. Les conditions de bord évoluent avec une constante de temps τ_c et nous supposons comme plus haut qu'elles font intervenir une unique température T_0. Imaginons momentanément que l'on « gèle » ces conditions de bord en les figeant à la valeur qu'elles prennent à un instant particulier t_0, c'est à dire :

$$\forall M \in \partial V,\ \forall t \in [0, \infty[,\ T(M,t) = g_{\text{bord}}\left(\frac{M}{L}, \frac{t_0}{\tau_c}\right) \quad \text{où} \quad g_{\text{bord}} \text{ fait intervenir } T_0 \quad .$$

Sous ces conditions de bord fixes, un unique régime stationnaire existe, dans lequel la température (que nous noterons T_{sta}) dépend de T_0, x, L, mais aussi de t_0 et τ_c (dont les valeurs fixent les conditions de bord). Insistons sur le fait qu'il s'agit d'un régime stationnaire *hypothétique*, qui s'établirait si on maintenait indéfiniment les conditions de bord qui prévalent à l'instant t_0. Dans ce régime fictif, ni le temps t ni la diffusivité n'interviennent. On a donc $n = 6$ et $k = 3$. D'après le théorème Π, il existe une fonction h telle que

$$\frac{T_{\text{sta}}(x)}{T_0} = h\left(\frac{x}{L}, \frac{t_0}{\tau_c}\right) \quad . \tag{10}$$

Du point de vue de la fonction T_{sta}, la date t_0 joue le rôle de paramètre et non pas de variable. Pour insister sur cet aspect, nous portons t_0 en indice et notons la température T_{sta,t_0} :

$$T_{\text{sta},t_0}(x) = T_0\ h\left(\frac{x}{L}, \frac{t_0}{\tau_c}\right) \quad . \tag{11}$$

Revenons maintenant au problème réel, dans lequel les conditions de bord et le champ de température évoluent dans le temps. On cherche T en fonction de x, t, T_0, τ_c, D et L. On a maintenant $n = 7$ et toujours $k = 3$, donc $n - k = 4$. On introduit [3]

$$\pi_1 = \frac{T}{T_0}, \quad \pi_2 = \frac{x}{L}, \quad \pi_3 = \frac{t}{\tau_c}, \quad \pi_4 = \frac{D\tau_c}{L^2} = \frac{\tau_c}{\tau_{\text{diff}}} = \text{Fo} \quad .$$

D'après le théorème Π, la solution du problème s'écrit sous la forme

$$\frac{T}{T_0} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{\tau_c}, \text{Fo}\right) \quad .$$

Supposons maintenant que les conditions de bord évoluent de plus en plus lentement (et/ou que le sytème devienne de plus en plus petit) : τ_c grandit (et/ou L diminue), Fo augmente et on considère la limite $\text{Fo} \to \infty$. Notons $f_\infty(\pi_2, \pi_3)$ la limite de $f(\pi_2, \pi_3, \text{Fo})$ quand $\text{Fo} \to \infty$. On obtient dans ce régime

$$\frac{T}{T_0} = f_\infty\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{\tau_c}\right) \tag{12}$$

Cette expression est de la même forme que (10) et on identifie [4] $h = f_\infty$. Ainsi, dans la limite $\text{Fo} \to \infty$, le champ de température à l'instant t est identique à celui du régime stationnaire hypothétique décrit au dessus, avec $t_0 = t$. Si Fo est « suffisamment grand » (il n'est jamais infini en pratique !), on a donc

$$\frac{T}{T_0} \simeq f_\infty\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{\tau_c}\right) = h\left(\frac{x}{L}, \frac{t}{\tau_c}\right) \qquad \text{ou encore} \quad T(x,t) \simeq T_{\text{sta},t}(x)$$

Régime thermique quasi-stationnaire
Soit un système de taille L, de temps de diffusion $\tau_{\text{diff}} = L^2/D$, soumis à des conditions de bord évoluant avec un temps caractéristique τ_c. Si $\tau_c \ll \tau_{\text{diff}}$, le champ de température est presque à chaque instant t celui qui s'établirait en régime stationnaire si les conditions de bord étaient indéfiniment maintenues à leurs valeurs à l'instant t. Les conditions de bord évoluent suffisamment lentement pour que l'entièreté du système s'y adapte avant qu'elles ne se modifient notablement.

II.3 Quasi-conservation du flux dans l'ARQS et résitance thermique

Comme nous l'avons vu en cours, un régime stationnaire (en l'absence de terme source) est caractérisé par la conservation du flux thermique. L'équation de la chaleur stationnaire $\Delta T = 0$ découle de la relation $\text{div}\,\vec{j} = 0$ qui exprime localement cette idée de conservation. C'est dans ce régime qu'on peut utiliser le concept de résistance thermique pour relier le flux le long d'un tube de champ à l'écart de température entre deux surfaces isothermes :

$$T_1 - T_2 = R\,\Phi \quad .$$

Dans un régime variable quelconque, le flux ne se conserve pas le long d'un tube de courant et le concept de résistance thermique est inapplicable. Cependant, si le régime est quasi-stationnaire, les champs $T(M,t)$ et $\vec{j}(M,t)$ possèdent presque, à chaque instant, les propriétés qu'ils auraient en régime stationnaire. On peut donc utiliser la résistance thermique et écrire à tout instant

$$T_1(t) - T_2(t) \simeq R\Phi(t) \quad .$$

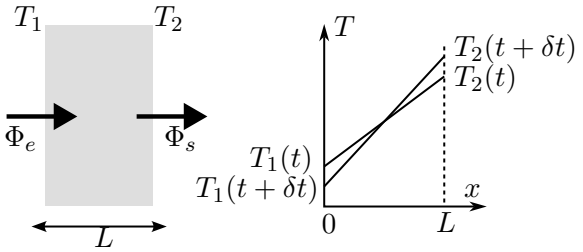
Les paragraphes précédents assurent que cette relation est valable si $\tau_c \gg \tau_{\text{diff}}$. Cependant, ces démonstrations étaient un peu abstraites et il est possible de comprendre plus simplement la condition $\tau_c \gg \tau_{\text{diff}}$ par un bilan thermique.

On se limite à un problème unidimensionnel dans un milieu d'épaisseur ℓ et de section S (problème du mur). En régime quasi-stationnaire, le profil de température et le flux thermique sont donnés par

$$T(x,t) = T_1(t) + (T_2(t) - T_1(t))\frac{x}{L} \qquad \Phi(t) = G(T_1(t) - T_2(t)) \quad \text{avec} \quad G = \frac{\lambda S}{L} \quad .$$

3. Plutôt que $\pi_4 = \text{Fo}$, on pourrait utiliser $\pi_4' = t/\tau_{\text{diff}} = \tilde{t}$. Comme $\pi_4' = \pi_3/\pi_4$, cela reviendrait au même. La suite du raisonnement est cependant plus simple en utilisant Fo.

4. À préciser ; on admet que le régime infiniment lent est le régime stationnaire. On ne voit pas comment le rôle des conditions initiales disparaît.



Ces relations supposent que le flux $\Phi_e(t)$ entrant à gauche du mur est identique à celui $\Phi_s(t)$ qui en sort à droite au même instant. En réalité, si les températures aux bords évoluent, le profil de température se modifie et l'énergie interne du mur varie légèrement, ce qui implique que le flux n'est pas exactement conservé. En appliquant le premier principe au mur entre les instants t et $t+\delta t$, on obtient

$$U(t+\delta t) - U(t) = \Phi_e \delta t - \Phi_s \delta t \quad . \tag{13}$$

Pendant δt, une tranche de mur d'épaisseur dx voit son énergie interne varier de $c\rho S dx \frac{\partial T}{\partial t}\delta t$, avec

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T}_1 + (\dot{T}_2 - \dot{T}_1)\frac{x}{L} \quad .$$

Pour le mur entier,

$$\delta U = \int_0^L \rho c S \frac{\partial T}{\partial t} dx \ \delta t = \rho c S \delta t \int_0^L [\dot{T}_1 + (\dot{T}_2 - \dot{T}_1)\frac{x}{L}]dx = \rho c S \delta t \frac{(\dot{T}_1 + \dot{T}_2)L}{2} \quad .$$

Le bilan (13) s'écrit donc

$$\Phi_e - \Phi_s = \rho c S \frac{(\dot{T}_1 + \dot{T}_2)L}{2} \quad .$$

La conservation du flux est approximativement valide si on peut négliger l'écart entre le flux entrant et le flux sortant, c'est à dire si $|\Phi_e - \Phi_s| \ll |\Phi_e|$ avec $\Phi_e \simeq \lambda S(T_1 - T_2)/L$, c'est à dire si

$$\rho c S \frac{|(\dot{T}_1 + \dot{T}_2)|L}{2} \ll \lambda S \frac{|T_1 - T_2|}{L}$$

Supposons que les températures et leurs écarts sont du même ordre de grandeur T_0, et leur évolution associée à un temps caractéristique τ_c :

$$|T_1 - T_2| \sim T_0 \qquad |\dot{T}_1 + \dot{T}_2| \sim \frac{T_0}{\tau_c} \quad .$$

La condition précédente devient

$$\rho c \frac{\dot{T}_0}{\tau_c} L \ll \frac{\lambda T_0}{L} \quad \text{i.e.} \quad \frac{L^2}{D} \ll \tau_c \quad \text{ou encore} \quad \tau_{\text{diff}} \ll \tau_c \quad .$$

On retrouve bien la condition d'ARQS des paragraphes précédents.

Il me semble possible d'adapter cette démonstration à l'échelle locale. Voici une présentation sommaire ce que cela donnerait (ceci n'est qu'une ébauche). En dimension 1, l'équation bilan s'écrit

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad .$$

En introduisant une échelle de longueur δx et une échelle de temps τ_c, on en déduit

$$\frac{\delta j}{\delta x} \simeq \rho c \frac{T}{\tau_c}$$

Ici, δj est la variation de j entre x et $x + \delta x dx$. La condition de quasi-conservation du flux s'écrit $\delta j \ll j$ et j est donné par la loi de Fourier : $j \simeq \lambda T/\delta x$. On en déduit à $\tau_c \gg L^2/D$.

III Illustration de l'ARQS par des solutions numériques

Des solutions numériques du problème du mur en régime variable permettent d'illustrer les idées précédentes et de mieux les saisir. Dans ce qui suit, la température à droite du mur T_2 est fixée, seule la température T_1 à gauche évolue. Le mur de béton a pour épaisseur $L = 0,1\,\text{m}$ et pour diffusivité $D = 5,1.10^{-7}\,\text{m}^2.\text{s}^{-1}$, ce qui donne $\tau_{\text{diff}} = 20.10^3\,\text{s} \simeq 5\text{h}$.

III.1 Variation exponentielle des conditions de bord

Dans ce premier exemple, je choisis une température T_1 qui relaxe de la valeur initiale $T_{1,0} = 20\,°\text{C}$ à la valeur asymptique $T_{1,\infty} = 40\,°\text{C}$ avec une constante de temps τ_c.

$$T_1(t) = T_{1,\infty} + (T_{1\,0} - T_{1\,\infty})e^{-t/\tau_c} \quad .$$

Ce comportement s'observe lorsqu'un pseudo-thermostat se thermalise avec un milieu ambiant dont il est séparé par un mur. Les résultats sont représentés sur la figure (1) dont je possède une version animée sous forme de fichier mp4. Pour $\tau_c = 40.10^3\,\text{s} \simeq 11\,\text{h}$, la condition d'ARQS $\tau_c \gg \tau_{\text{diff}}$ est grossièrement satisfaite et on voit que le profil de température est à tout instant quasi-linéaire. Au contraire, pour $\tau_c = 10^3\,\text{s} \simeq 16\,\text{min}$, le profil de température n'a pas le temps de s'adapter ; l'évolution de T_1 se fait d'abord sentir près de $x = 0$ mais au même instant, elle n'a pas d'incidence près de $x = L$. On observe que $\frac{\partial T}{\partial x}$ dépend de x à t donné, donc j n'est pas uniforme et le flux thermique entrant à droite n'est pas égal à celui sortant à gauche.

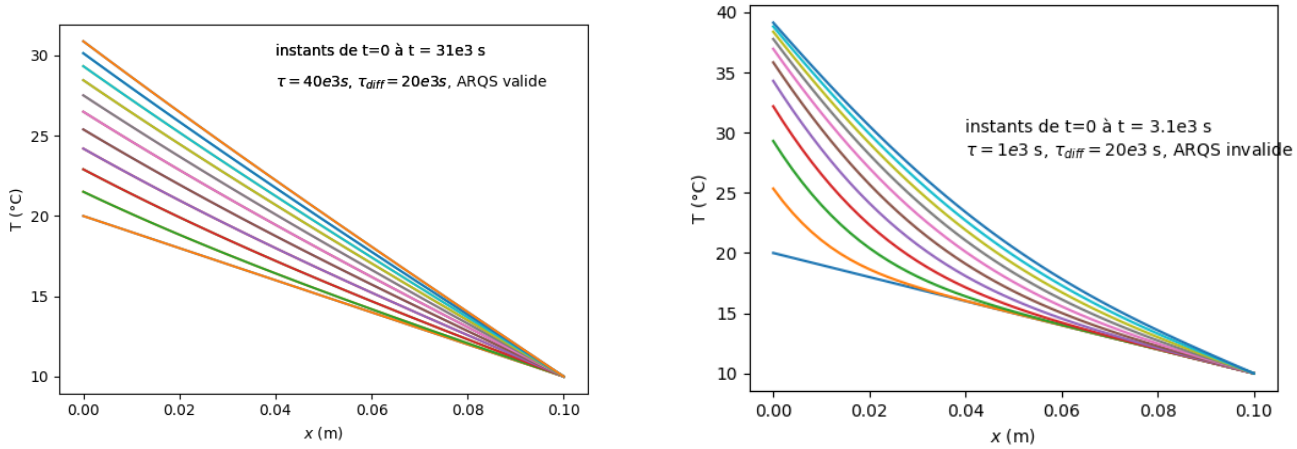


FIGURE 1 – Évolution de la température dans un mur lorsqu'on impose un variation exponentielle de T_1. Selon la constante de temps intervenant dans l'évolution de T_1, le régime est quasi-stationnaire (à gauche) ou non (à droite).

III.2 Variation sinusoïdale des conditions de bord

La température T_2 est fixée à $20\,°\text{C}$ et T_1 varie sinusoïdalement de $\pm 10\,°\text{C}$ autour de la valeur moyenne $10\,°\text{C}$. Cela décrit le mur d'une maison dont la face intérieure reste à température constante (grâce au chauffage) alors que la température extérieure varie avec une période P. Les résultats sont visibles sur la figure (2) (dont je possède également une version animée), pour trois valeurs de P.

— Pour $P = 500\,\text{s}$, l'onde thermique pénètre très peu le mur et les variations ne se font pas sentir en $x = L$. Le régime n'est pas du tout quasi-stationnaire ; le flux en $x = 0$ est de signe variable alors que le flux en $x = L$ est presque constant, déterminé par la valeur moyenne de T_1. Le flux thermique n'est pas conservatif.

— Pour $P = 10.10^3\,\text{s} \simeq 3\text{h}$, l'onde thermique pénètre déjà plus profondément et le gradient de température sur la face droite du mur subit des variations, mais le profil est loin d'être linéaire et on n'est toujours pas dans l'ARQS. Le flux n'est pas conservatif.

— Pour $P = 400.10^3\,\text{s} \simeq 46\,\text{jours}$, le profil de température est quasi-linéaire et $j = -\lambda \partial T/\partial x$ est presque uniforme à chaque instant ; le flux se conserve approximativement. Comme $P \gg \tau_{\text{diff}}$, Fo $\gg 1$ et on est effectivement en régime quasi-stationnaire.

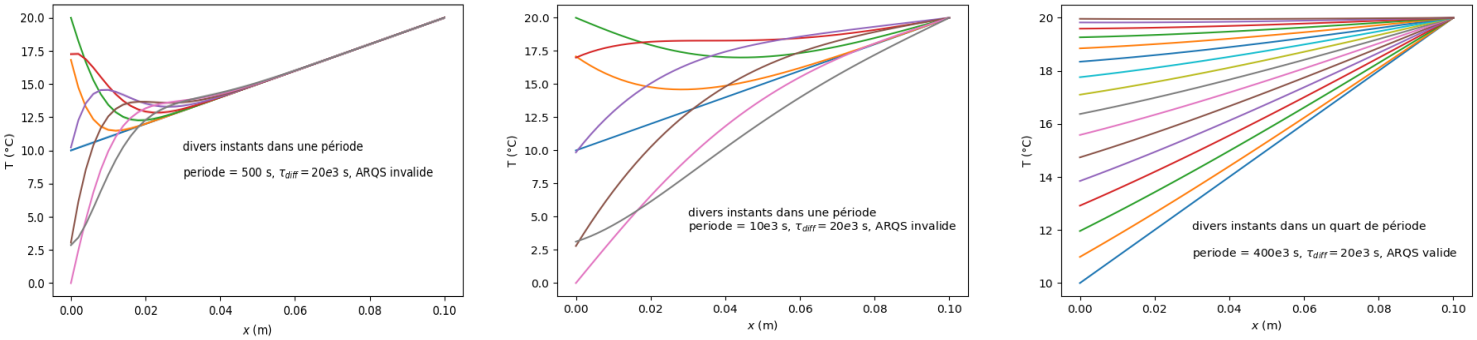


FIGURE 2 – Évolution de la température dans un mur dont une face est soumise à une variation sinusoïdale. Selon la période P, les ondes thermiques pénètrent plus ou moins profondément. Le régime est quasi-stationnaire pour $P = 400.10^3\,\text{s} \gg \tau_{\text{diff}}$.