Exercice 1. (*) Fonctions génératrices

Dans cet exercice, on considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour toute variable aléatoire X de $\mathcal{E}$, on définit la *fonction génératrice* de X

$$G_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathbb{E}(t^X).$$

1. Pour tout élément X de $\mathcal{E}$, montrer que G_X est une fonction polynomiale. Que vaut $G_X(1)$?

2. Expliciter la fonction G_X dans les cas suivants.

a. La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

b. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

c. La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

3. Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{E}$. Montrer que les fonctions G_X et G_Y sont égales si, et seulement si, les lois de X et de Y sont identiques.

4. Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{E}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer l'identité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Généraliser cette propriété à un nombre quelconque de variables aléatoires.

5. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Déterminer la fonction génératrice de S_n et en déduire la loi de S_n (c'est une nouvelle démonstration d'une propriété du cours).

6. Soit X un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que l'espérance et la variance de X sont données par

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2.$$

7. À l'aide de ces formules, retrouver les valeurs déjà connues pour les lois classiques de la question 2.

8. Soit n un entier strictement positif. On considère une variable aléatoire N à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On considère des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même loi. On pose enfin

$$S = \sum_{k=1}^N X_k.$$

Montrer la relation $G_S = G_N \circ G_{X_1}$. On pourra utiliser la formule de l'espérance totale, présentée en partie 5 du poly de probas.

En déduire les relations

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N) \times \mathbb{E}(X_1) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}(X_1)^2.$$

Question subsidiaire. Résoudre le problème 389 du Projet Euler¹.

1. <https://projecteuler.net/problem=389> Je ne proposerai pas de solution de cette question dans mon corrigé.

Exercice 2. (*) Sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, on se donne trois variables aléatoires mutuellement indépendantes A, B, C suivant une même loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour tout ω de Ω , on pose

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\text{rg}(M)$.
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\text{tr}(M)$?
3. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
4. Quelle est la probabilité que M soit nilpotente ?

Exercice 3. ()** Une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs et telle que la somme des coefficients de chaque ligne soit égale à 1.

a. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

On fixe une matrice stochastique A . Pour tout entier p , on note $a_{i,j}^{(p)}$ les coefficients de la matrice A^p . On pose de plus

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}^{(p)} \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} = \max_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}^{(p)}.$$

Enfin, on note ε le plus petit des coefficients de la matrice A et on fait l'hypothèse que ce nombre est strictement positif.

b. Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Soit j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Prouver la majoration

$$M_j^{(p+1)} \leq (1 - \varepsilon)M_j^{(p)} + \varepsilon m_j^{(p)}.$$

c. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, en déduire la majoration

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2\varepsilon) \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

d. Que peut-on en déduire quant à la suite de matrices $(A^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$?

e. Interprétation probabiliste ?

Exercice 4. (*)** Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs.

On suppose que la série $\sum b_n$ est divergente et que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1. On suppose enfin que le quotient a_n/b_n possède une limite finie, notée s , lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

On pose

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

a. Montrer que A_n/B_n tend vers s quand n tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la fonction a est définie au moins sur $] -1, 1[$.

c. Montrer que $a(x)/b(x)$ tend vers s quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures.

Exercice 5. (*)** On considère une suite d'entiers relatifs $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement positifs.

a. Établir l'existence d'une constante C strictement positive vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{C}{q_n^2}.$$

b. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.