Chapitre 14 — fonctions de plusieurs variables

1 Rappels

1.1 Topologie

Rappels sur les normes, notamment les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.
Rappels sur les ouverts et les fermés.

1.2 Limites

Rappels sur la convergence des suites de vecteurs.
Rappels sur les fonctions continues. Exemples de problèmes de limites.
Utilisation de fonctions continues pour justifier qu'une partie de $\mathbb{R}^p$ est ouverte ou fermée.
Existence d'un extremum sur un fermé borné.
Application : norme d'opérateur pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Norme triple d'une matrice.

2 Dérivation

2.1 Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
Notations $\partial_i f(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$: en tout point, la fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 selon toutes les coordonnées et les fonctions $\partial_i f$ sont toutes continues sur U.
Stabilité par combinaison linéaire, par produit.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et g est une fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle qui contient $f(\mathrm{U})$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Développement limité à l'ordre 1.
La classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U implique la continuité.

2.3 Différentielle

La différentielle de f au point a est l'application

$$\mathrm{d}f(a) : (h_1, \ldots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} h_i \times \partial_i f(a).$$

Le nombre $\mathrm{d}f(a)(h)$ est aussi noté $\mathrm{d}f(a) \cdot h$.

2.4 Gradient

Gradient de f au point a. Identité $\mathrm{d}f(a) \cdot h = (\nabla f(a)|h)$.

2.5 Règle de la chaîne

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit γ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, à valeurs dans U. La fonction $f \circ \gamma$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, de dérivée

$$t \mapsto \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = ((\nabla f)(\gamma(t))|\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(\gamma(t))\gamma_i'(t).$$

Dérivation de fonctions de la forme $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.
Cas des coordonnées polaires.

2.6 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition. Notations $\partial^2_{i,j} f$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz.

Contre-exemple en l'absence de la classe $\mathcal{C}^2$: la fonction f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

3 Extremums

Extremum global, extremum local.
Existence d'un extremum global d'une fonction continue sur un fermé borné.
Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ possède un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.
Minimisation des fonctions de la forme $(a,b) \mapsto ||\vec{y} - a\vec{x} - b\vec{n}||^2$. Régression linéaire.

4 Équations aux dérivées partielles

4.1 Ordre un

Résolution de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, de $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$, de $\overrightarrow{\nabla} f = \overrightarrow{0}$.

4.2 Ordre deux

Résolution de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

Programme de colles n° 11 (du lundi 20 au vendredi 31 mars 2017)

Tout ce chapitre. En guise de question de cours, on fera calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 d'une fonction raisonnable.
