PC* — mathématiques **jeudi 2 mars 2017**
Corrigé du devoir en temps libre n° 12

Corrigé du devoir en temps libre n° 12

Exercice 1. 1. Le polynôme caractéristique de M est un polynôme unitaire de degré impair donc il admet en $+\infty$ et en $-\infty$ les limites respectives $+\infty$ et $-\infty$. Par continuité, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'une racine χ_{M} dans l'intervalle $\mathbb{R}$. Autrement dit, la matrice M possède au moins une racine réelle.

2.a. Les coefficients de X et de Y sont respectivement les parties réelles et imaginaires des coefficients de Z, c'est-à-dire des coefficients réels, donc ces vecteurs colonnes sont des éléments de E.

2.b. On suppose que la famille (X, Y) est liée.

Les vecteurs X et Y ne sont pas tous deux nuls car la relation $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{i}\mathrm{Y}$ donnerait que Z est nul, ce qui est faux pour un vecteur propre. Supposons sans perte de généralité que X n'est pas nul. Il existe alors t réel tel que $\mathrm{Y} = t\mathrm{X}$, ce qui donne ensuite $\mathrm{Z} = (1 + \mathrm{i}t)\mathrm{X}$. Le vecteur X est proportionnel à Z et non nul donc c'est un vecteur propre de M pour la valeur propre α.

On obtient la relation $\mathrm{MX} = \lambda\mathrm{X}$, c'est-à-dire $\mathrm{MX} = \alpha\mathrm{X} + \mathrm{i}\beta\mathrm{X}$, donc $\mathrm{i}\beta\mathrm{X}$ est un vecteur à coefficients réels, mais c'est impossible car $\beta\mathrm{X}$ n'est pas nul.

Cette contradiction prouve que la famille (X, Y) est libre.

2.c. La relation $\mathrm{MZ} = \lambda\mathrm{Z}$ s'écrit

$$\mathrm{MX} + \mathrm{i}\mathrm{MY} = (\alpha\mathrm{X} - \beta\mathrm{Y}) + \mathrm{i}\,(\beta\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Y})\,.$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient

$$\mathrm{MX} = \alpha\mathrm{X} - \beta\mathrm{Y} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{MY} = \beta\mathrm{X} + \alpha\mathrm{Y}.$$

Ces égalités prouvent que $f(\mathrm{X})$ et $f(\mathrm{Y})$ sont dans F, si bien que F est stable par f. La matrice de f_{F} relativement à la base (X, Y) est

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Remarque culturelle. Cette matrice est proportionnelle à une matrice de rotation. On dit que c'est une matrice de *similitude directe*. Une similitude directe est un endomorphisme qui préserve les angles et l'orientation.

---

3. Soit g un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note n la dimension de g. On se donne une base $\mathcal{B}$ de E et on note M la matrice de g relativement à la base $\mathcal{B}$.

Le polynôme caractéristique χ_{M} est scindé sur $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert). Soit λ une racine de ce polynôme.

Si λ est réel, alors f possède au moins un vecteur propre z associé à cette valeur propre et la droite $\mathrm{Vect}(z)$ est alors une droite stable par f.

Si λ n'est pas réel, alors la question 2 donne la construction de deux vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que le plan engendré par X et Y soit stable par $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{MX}$. Si on note x et y les vecteurs de E représentés par X et Y dans la base $\mathcal{B}$, le plan engendré par x et y est alors stable par f.

L'affirmation proposée est donc correcte.

---

4. L'endomorphisme $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}$ n'admet aucun sous-espace de dimension finie stable en dehors du sous-espace trivial.

Pour le démontrer, considérons un sous-espace vectoriel F de dimension finie de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, de dimension non nulle. Soit $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m)$ une base de F. Notons d le maximum des degrés de $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$.

L'espace vectoriel F est alors inclus dans $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$ et $f(\mathrm{F})$ contient un polynôme de degré $d+1$ donc $f(\mathrm{F})$ n'est pas inclus dans F.

5.a. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} - 5 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1+2\mathrm{i})(\mathrm{X}+1-2\mathrm{i}).$$

L'espace propre $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)$ est la droite dirigée par le vecteur colonne

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'espace propre $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} + (1+2\mathrm{i})\mathrm{I}_3)$ est la droite (au sens complexe) dirigée par le vecteur colonne

$$\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de la question 2, on obtient

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le plan $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est stable par f. Notons P la matrice de colonnes X, Y, U.

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve que le déterminant de cette matrice vaut 2, ce qui est non nul. La matrice P est inversible donc $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{U})$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5.b. La matrice $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est la matrice de f relativement à la base $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{U})$. On connaît déjà la relation $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$ et les calculs de la question 2.c donnent

$$f(\mathrm{X}) = -\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \qquad \text{et} \qquad f(\mathrm{Y}) = -2\mathrm{X} - \mathrm{Y} \qquad \text{puis} \qquad \mathrm{T} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.c. La fonction $t \mapsto e^t\mathrm{U}$ est une solution de (S) qui vérifie la condition initiale $\mathrm{X}(0) = \mathrm{U}$. Le théorème de Cauchy linéaire affirme que ce problème de Cauchy admet une unique solution. Cette unique solution est donc la fonction $t \mapsto e^t\mathrm{U}$.

Exercice 2. 1. La fonction Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, à valeurs réelles et la fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Une première dérivation donne

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'_\alpha(x) = \frac{\alpha \sin(\alpha \operatorname{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Une deuxième dérivation donne

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f''_\alpha(x) = -\frac{\alpha^2 \cos(\alpha \operatorname{Arccos}(x))}{1-x^2} + \alpha \sin(\alpha \operatorname{Arccos}(x)) \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Pour tout x dans $]-1,1[$, on en tire l'égalité

$$\begin{aligned}(1-x^2)f''_\alpha(x) - xf'_\alpha(x) + \alpha^2 f_\alpha(x) = & -\alpha^2 \cos(\alpha \operatorname{Arccos}(x)) + \frac{\alpha \sin(\alpha \operatorname{Arccos}(x)\, x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\alpha x \sin(\alpha \operatorname{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}} \\ & + \alpha^2 \cos(\alpha \operatorname{Arccos}(x)) \\ = & \ 0.\end{aligned}$$

La fonction f_α est donc solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle (E_α).

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ possède un rayon de convergence R strictement positif et on définit sur l'intervalle $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on calcule ses dérivées successives par dérivation terme à terme

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

puis

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Soit x dans $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$. On trouve

$$\begin{aligned}(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \alpha^2 f(x) &= \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-n(n-1) - n + \alpha^2\right) a_n\, x^n}_{k=n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+2)(k+1)a_{k+2} - (k^2-\alpha^2)a_k\right) x^k.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, la fonction f est solution de (E_α) sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ si et seulement si ses coefficients vérifient la relation de récurrence $(*)$ suivante

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_{k+2} = \frac{k^2-\alpha^2}{(k+2)(k+1)} a_k.$$

On suppose maintenant que f est solution de (E_α) sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$. En itérant la relation de récurrence, on obtient pour tout p dans $\mathbb{N}$

$$a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)!} \underbrace{\prod_{i=0}^{p-1} ((2i)^2 - \alpha^2)}_{\text{noté } \alpha_p} \qquad \text{et} \qquad a_{2p+1} = \frac{a_1}{(2p+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^{p-1} ((2i+1)^2 - \alpha^2)}_{\text{noté } \beta_p},$$

où il s'entend que le produit vaut 1 lorsque p vaut 0.

On obtient donc

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \quad f(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \beta_p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Réciproquement, posons

$$f_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \qquad \text{et} \qquad f_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \beta_p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Par la règle de d'Alembert (des séries numériques), on voit que ces deux séries entières ont un rayon de convergence égal à 1. Les deux fonctions f_0 et f_1 sont donc définies sur $]-1,1[$. De plus, les coefficients de leurs développements en série entière vérifient la relation de récurrence $(*)$ donc ces deux fonctions sont des solutions de (E_α) sur $]-1,1[$.

La fonction f_0 est paire et la fonction f_1 est impaire. De plus, ces deux fonctions sont différentes de la fonction nulle (car leurs développements en série entière ne sont pas nuls) donc le couple (f_0, f_1) est une famille libre.

Sur $]-1,1[$, l'équation différentielle (E_α) s'écrit sous la forme $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, les fonctions

$$a : x \mapsto \frac{-x}{1-x^2} \qquad \text{et} \qquad b : x \mapsto \frac{\alpha^2}{1-x^2}$$

étant continues sur $]-1,1[$. Le théorème de Cauchy linéaire permet d'en déduire que l'espace vectoriel des solutions de (E_α) sur $]-1,1[$ est de dimension 2.

Le couple (f_0, f_1) est donc une base de cet espace vectoriel. On en déduit que les solutions de (E_α) sont toutes développables en série entière sur $]-1,1[$ par combinaison linéaire de f_0 et f_1.

---

3. On observe les relations

$$f_0(0) = 1, \quad f_0'(0) = 0, \quad f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 1.$$

Ainsi, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la combinaison linéaire $\lambda f_0 + \mu f_1$ est la solution du problème de Cauchy

$$(\mathrm{E}_\alpha) \qquad y(0) = \lambda, \qquad y'(0) = \mu.$$

On trouve $f_\alpha(0) = \cos(\alpha\pi/2)$ et $f_\alpha'(0) = \alpha \sin(\alpha\pi/2)$ donc le développement en série entière de la fonction f_α est

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_\alpha(x) = \cos(\alpha\pi/2) \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \alpha \sin(\alpha\pi/2) \sum_{p=0}^{+\infty} \beta_p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Remarque. Dans le cas où α est un entier, tout marche pareil sauf la règle de d'Alembert car les α_p ou les β_p sont nuls à partir d'un certain rang. On remarque alors que f_α est un polynôme de degré α : c'est le polynôme de Tchebychev T_α.

Dans le cas où α est un entier pair (de la forme $\alpha = 2\ell$), on obtient

$$f_\alpha(x) = (-1)^\ell \sum_{p=0}^{\ell} \alpha_p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

et les α_p ont une expression avec des factorielles, que je laisse en exercice. Même chose dans le cas où α est un entier impair.

Exercice 3. I.1. Montrons que F est linéaire selon la première colonne.

Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit U une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons C la matrice obtenue à partir de B en remplaçant B_1 par U.

$$f_1(\mathrm{B}_1 + \lambda\mathrm{U}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n) = (\mathrm{AB}_1 + \lambda\mathrm{AU}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n),$$

où j'utilise des listes de colonnes pour représenter des matrices carrées. Le déterminant est linéaire selon la première colonne donc

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(f_1(\mathrm{B}_1 + \lambda\mathrm{U}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n) &= \mathrm{dét}(\mathrm{AB}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n) + \lambda\,\mathrm{dét}(\mathrm{AU}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n) \\ &= \mathrm{dét}(f_1(\mathrm{B})) + \lambda\,\mathrm{dét}(f_1(\mathrm{C})). \end{aligned}$$

Prenons maintenant un indice i entre 2 et n.

$$f_i(\mathrm{B}_1 + \lambda\mathrm{U}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n) = (\mathrm{B}_1 + \lambda\mathrm{U}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_{i-1}, \mathrm{AB}_i, \mathrm{B}_{i+1}, \ldots, \mathrm{B}_n).$$

Cette fois, on utilise la linéarité du déterminant selon la i-ième colonne

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(f_i(\mathrm{B}_1 + \lambda\mathrm{U}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n)) &= \mathrm{dét}(\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_{i-1}, \mathrm{AB}_i, \mathrm{B}_{i+1}, \ldots, \mathrm{B}_n) + \lambda\,\mathrm{dét}(\mathrm{U}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_{i-1}, \mathrm{AB}_i, \mathrm{B}_{i+1}, \ldots, \mathrm{B}_n) \\ &= \mathrm{dét}(f_i(\mathrm{B})) + \lambda\,\mathrm{dét}(f_i(\mathrm{C})). \end{aligned}$$

En sommant ces égalités, il vient

$$\mathrm{F}(\mathrm{B}_1 + \lambda\mathrm{U}, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n) = \mathrm{F}(\mathrm{B}) + \lambda\mathrm{F}(\mathrm{C}).$$

On a prouvé que F est linéaire selon la première colonne. La démonstration est la même pour toutes les autres colonnes.

I.2. On traite seulement le cas $(i, j) = (1, 2)$. On exploite le caractère antisymétrique du déterminant

$$\mathrm{dét}(f_1(\mathrm{C})) = \mathrm{dét}(\mathrm{AB}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_n) = -\,\mathrm{dét}(\mathrm{B}_1, \mathrm{AB}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_n) = -\,\mathrm{dét}(f_2(\mathrm{B})).$$

On trouve de même $\mathrm{dét}(f_2(\mathrm{C})) = -\,\mathrm{dét}(f_1(\mathrm{B}))$. Soit maintenant un indice i entre 3 et n.

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(f_i(\mathrm{C})) = \mathrm{dét}(\mathrm{B}_2, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_{i-1}, \mathrm{AB}_i, \mathrm{B}_{i+1}, \ldots, \mathrm{B}_n) &= -\,\mathrm{dét}(\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_{i-1}, \mathrm{AB}_i, \mathrm{B}_{i+1}, \ldots, \mathrm{B}_n) \\ &= -\,\mathrm{dét}(f_i(\mathrm{B})). \end{aligned}$$

En sommant ces égalités, il vient $\mathrm{F}(\mathrm{C}) = -\mathrm{F}(\mathrm{B})$.

Le raisonnement est semblable pour les autres couples (i, j) d'indices distincts entre 1 et n. La fonction F est antisymétrique.

I.3. Le déterminant de $f_i(\mathrm{I}_n)$ est triangulaire par blocs : on trouve qu'il vaut $a_{i,i}$, si bien que $\mathrm{F}(\mathrm{I}_n)$ vaut $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$.

I.4. Rappel : le déterminant est la seule fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à être antisymétrique, linéaire selon chaque colonne et à valoir 1 en I_n. On remarque ici que la fonction

$$\mathrm{B} \mapsto \mathrm{F}(\mathrm{B}) - (\mathrm{tr}(\mathrm{A}) - 1)\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B})$$

vérifie toutes ces hypothèses donc cette fonction est la fonction $\mathrm{B} \mapsto \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B})$.

On obtient donc $\mathrm{F}(\mathrm{B}) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{B})$ pour toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.1. On dérive la fonction w en utilisant la multilinéarité du déterminant. Pour tout t dans I, on trouve

$$\begin{aligned} w'(t) &= \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{X}_1'(t), \mathrm{X}_2(t), \dots, \mathrm{X}_n(t)) + \cdots + \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{X}_1(t), \dots, \mathrm{X}_{n-1}(t), \mathrm{X}_n'(t)) \\ &= \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{A}(t)\mathrm{X}_1(t), \mathrm{X}_2(t), \dots, \mathrm{X}_n(t)) + \cdots + \mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{X}_1(t), \dots, \mathrm{X}_{n-1}(t), \mathrm{A}(t)\mathrm{X}_n(t)) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{A}(t))\,\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{X}_1(t), \dots, \mathrm{X}_n(t)) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{A}(t))w(t), \end{aligned}$$

en exploitant la formule de la première partie.

II.2. Notons α une primitive sur I de la fonction $t \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{A}(t))$. Il existe alors une constante λ telle que

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad w(t) = \lambda \mathrm{e}^{\alpha(t)}.$$

En particulier, la fonction w est la fonction nulle si $\lambda = 0$ et elle ne s'annule en aucun point si $\lambda \neq 0$.

Au fait, la fonction $t \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{A}(t))$ est continue car elle s'écrit $t \mapsto a_{1,1}(t) + \cdots + a_{n,n}(t)$ et chaque $a_{i,i}$ est une fonction continue.

II.3. Soit $t_0 \in \mathrm{I}$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, l'application

$$\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}(t_0)$$

est un isomorphisme de E_0 sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $\mathcal{X}$ soit une base de E_0 est que la famille $(\mathrm{X}_1(t_0), \dots, \mathrm{X}_n(t_0))$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui revient à dire que la matrice $\mathrm{W}(t_0)$ est inversible. Cela revient donc à dire que $w(t_0)$ n'est pas nul. D'après le résultat de la question précédente, cela équivaut à ce que w ne soit pas la fonction nulle.

II.4. La matrice $\mathrm{A}(t)$ s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$, ce qui donne $\mathrm{tr}(\mathrm{A}(t)) = -a(t)$.

Dans le cas où la fonction a est nulle, le wronskien du couple (x_1, x_2) a une dérivée nulle (d'après II.1) sur l'intervalle I donc la fonction w est constante.

II.5. Dans ce cas, le nombre $\mathrm{tr}(\mathrm{A}(t))$ est la constante $-a$. La relation de la question II.1 s'écrit

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad w'(t) = -aw(t)$$

si bien qu'il existe une constante λ telle que

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad w(t) = \lambda \mathrm{e}^{-at}.$$

Une autre manière d'obtenir ce résultat est d'exprimer les solutions sous la forme $t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{rt} + \beta \mathrm{e}^{st}$ et de calculer effectivement le déterminant $w(t)$. Le calcul se simplifie au moyen de la relation $r + s = -a$.

III.a. La formule de dérivation d'un produit donne

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{W}'(t)\mathrm{C}(t) + \mathrm{W}(t)\mathrm{C}'(t).$$

D'autre part, les colonnes de la matrice $\mathrm{A}(t)\mathrm{W}(t)$ sont $\mathrm{A}(t)\mathrm{X}_1(t), \ldots, \mathrm{A}(t)\mathrm{X}_n(t)$, c'est-à-dire $\mathrm{X}_1'(t), \ldots, \mathrm{X}_n'(t)$ car les fonctions vectorielles $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont solutions de (S_0), donc $\mathrm{A}(t)\mathrm{W}(t) = \mathrm{W}'(t)$. Pour tout t dans I, on en déduit les égalités

$$\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{W}(t)\mathrm{C}(t) + \mathrm{W}(t)\mathrm{C}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) + \mathrm{W}(t)\mathrm{C}'(t)$$

donc $\mathrm{X}'(t) - \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) = \mathrm{W}(t)\mathrm{C}'(t)$.

III.b. Pour que X soit la solution de (S) qui s'annule en t_0, il suffit d'avoir $\mathrm{C}(t_0) = 0$ et

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{C}(t) = \mathrm{W}(t)^{-1}\mathrm{B}(t).$$

Cela est possible en prenant la fonction $\mathrm{C} : t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{W}(s)^{-1}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s$. On a utilisé au passage l'inversibilité de la matrice $\mathrm{W}(s)$ pour tout s dans I, qui découle du résultat des questions II.3 et II.2.

Par unicité d'une solution d'un problème de Cauchy, la fonction

$$t \mapsto \mathrm{W}(t) \int_{t_0}^{t} \mathrm{W}(s)^{-1}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s$$

est l'unique solution de (S) qui s'annule en t_0.

III.c. Pour obtenir la solution Y, il suffit d'adapter la condition initiale, qui s'écrit $\mathrm{C}(t_0) = \mathrm{W}(t_0)^{-1}\mathrm{U}_0$, dans le raisonnement précédent. Le choix convenable de la fonction C est alors

$$t \mapsto \mathrm{W}(t_0)^{-1}\mathrm{U}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{W}(s)^{-1}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s$$

et la solution Y est donnée par

$$\mathrm{Y} : t \mapsto \mathrm{W}(t)\mathrm{W}(t_0)^{-1}\mathrm{U}_0 + \mathrm{W}(t) \int_{t_0}^{t} \mathrm{W}(s)^{-1}\mathrm{B}(s)\,\mathrm{d}s.$$

III.d. L'ensemble des solutions de $y'' - 5y' + 6y = 0$ est le plan vectoriel engendré par $y_1 : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$ et $y_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{3t}$.

L'équation différentielle à résoudre se réécrit $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$ en posant

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t / \operatorname{ch}^2(t) \end{pmatrix}.$$

Pour reprendre les notations de cette partie III, on choisit

$$\mathrm{X}_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X}_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix},$$

ce qui donne pour tout t réel

$$\mathrm{W}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{2t} & 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad w(t) = \mathrm{e}^{2t} \times 3\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{3t} \times 2\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{5t}.$$

Pour tout t réel, l'inverse de la matrice wronskienne $\mathrm{W}(t)$ est donnée par

$$\mathrm{W}(t)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{5t}} \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{3t} & -\mathrm{e}^{3t} \\ -2\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière du système différentiel $\mathrm{X}' = \mathrm{A}(t)\mathrm{X} + \mathrm{B}(t)$ est donnée, d'après III.c, par le choix

$$\mathrm{Y} : t \mapsto \mathrm{W}(t)\mathrm{C}(t), \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{C} : t \mapsto \int_0^t \mathrm{W}(s)^{-1}\mathrm{B}(s)\ \mathrm{d}s.$$

Un produit matriciel donne

$$\mathrm{W}(s)^{-1}\mathrm{B}(s) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-s}/\operatorname{ch}^2(s) \\ \mathrm{e}^{-2s}/\operatorname{ch}^2(s) \end{pmatrix}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculons les composantes du vecteur $\mathrm{C}(t)$.

$$c_1(t) = \int_0^t \frac{-\mathrm{e}^{-s}}{\operatorname{ch}^2(s)}\ \mathrm{d}s = -4 \int_0^t \frac{\mathrm{e}^s}{(\mathrm{e}^{2s}+1)^2}\ \mathrm{d}s.$$

Effectuons le changement de variable $u = \mathrm{e}^s$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$c_1(t) = -4 \int_1^{\mathrm{e}^t} \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+1)^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, une possibilité est d'effectuer le changement de variable $v = \operatorname{Arctan}(u)$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -4 \int_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^t)} \frac{\mathrm{d}v}{\tan^2(v)+1} = -4 \int_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^t)} \cos^2(v)\ \mathrm{d}v = -2 \int_{\pi/4}^{\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^t)} (1+\cos(2v))\ \mathrm{d}v \\ &= -2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^t) - \sin(2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^t)) + \text{constante}. \end{aligned}$$

Ce calcul peut être légèrement raffiné au moyen de l'identité $\sin(2\operatorname{Arctan}(a)) = 2a/(1+a^2)$, dont je laisse la démonstration en exercice. On obtient finalement

$$c_1(t) = -2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^t) - \frac{2\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} + \text{constante}.$$

Passons au calcul de l'autre composante

$$c_2(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{\operatorname{ch}^2(s)}\ \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{4\mathrm{e}^{-2s}}{\mathrm{e}^{2s}+2+\mathrm{e}^{-2s}}\ \mathrm{d}s.$$

Effectuons le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-2s}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned} c_2(t) &= -2 \int_1^{\mathrm{e}^{-2t}} \frac{\mathrm{d}s}{s+2+1/s} = -2 \int_1^{\mathrm{e}^{-2t}} \frac{s}{(s+1)^2}\ \mathrm{d}s = -2 \int_1^{\mathrm{e}^{-2t}} \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2}\ \mathrm{d}s \\ &= -2 \int_1^{\mathrm{e}^{-2t}} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)\ \mathrm{d}s \\ &= -2\ln(\mathrm{e}^{-2t}+1) - \frac{2}{\mathrm{e}^{-2t}+1} + \text{constante}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle étudiée est donc finalement

$$\left\{ t \mapsto \mathrm{e}^{2t}\left(-2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^t) - \frac{2\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}} + \lambda \right) + \mathrm{e}^{3t}\left(-2\ln(\mathrm{e}^{-2t}+1) - \frac{2}{\mathrm{e}^{-2t}+1} + \mu \right)\ ;\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

IV.a. Comme on l'a vu en II.4, la fonction w est constante. Sa valeur est $w(t_0)$, c'est-à-dire 1.

IV.b. Pour tout t dans I, on trouve $\left(\dfrac{x_1}{x_0}\right)'(t) = \dfrac{x_1'(t)x_0(t) - x_1(t)x_0'(t)}{x_0(t)^2} = \dfrac{w(t)}{x_0(t)^2} = \dfrac{1}{x_0(t)^2}$.

IV.c. La fonction x_1/x_0 s'annule en t_0, ce qui donne pour tout t dans I la relation

$$\frac{x_1(t)}{x_0(t)} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{x_0(s)^2} \qquad \text{puis} \qquad x_1(t) = x_0(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{x_0(s)^2}.$$

IV.d. On observe qu'effectivement, la fonction x_0 ne s'annule pas sur I et qu'elle vérifie la condition initiale $(x_0(0), x_0'(0)) = (1, 0)$. Le calcul de dérivée seconde donne

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad x_0''(t) = -2\cos^2(t) + 2\sin^2(t) \qquad \text{puis} \qquad b(t) = 2\left(-1 + \tan^2(t)\right).$$

Soit t dans I. Le calcul de $x_1(t)$ passe par

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\cos^4(s)} = \int_0^t (1 + \tan^2(t))\tan'(t)\ \mathrm{d}t = \tan(t) + \frac{1}{3}\tan^3(t).$$

La fonction x_1 est donc donnée par $t \mapsto \cos^2(t)\left(\tan(t) + \dfrac{1}{3}\tan^3(t)\right)$.

Exercice 4. Le « si » a été corrigé en classe. Passons à la réciproque. On suppose que (E) admet un système fondamental de solutions (f, g) formé d'une fonction f paire et d'une fonction g impaire.

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on obtient alors

$$\left\{\begin{array}{lcccl} a(x)f'(x) & + & b(x)f(x) & = & -f''(x) \\ a(x)g'(x) & + & b(x)g(x) & = & -g''(x). \end{array}\right.$$

La matrice associée à ce système a pour déterminant $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$, c'est-à-dire $w(x)$ en notant w le wronskien du couple (g, f). Cette matrice est donc inversible et la résolution du système donne pour tout x dans $\mathbb{R}$ les relations

$$a(x) = \frac{-f''(x)g(x) + g''(x)f(x)}{w(x)} \qquad \text{et} \qquad b(x) = \frac{f''(x)g'(x) - g''(x)f'(x)}{w(x)}.$$

Les fonctions f, g', f'' sont paires. Les fonctions g, f', g'' sont impaires. On en déduit que w est paire, puis que a est impaire et que b est paire.
