# Problème I : fonctions harmoniques de deux variables

Étant donné une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U du plan, le *laplacien* de la fonction $f$ est la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Une *fonction harmonique* sur l'ouvert U est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U dont le laplacien est la fonction nulle.

## Partie I — Exemples de fonctions harmoniques de deux variables

**Question 1.** Démontrer que la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(x, y) = \exp(x + \mathrm{i}y)$$

est harmonique.

**Question 2.** Soit $u$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. On définit la fonction

$$h : (x, y) \mapsto u(\sqrt{x^2 + y^2})$$

sur l'ouvert $\mathrm{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Trouver tous les choix de la fonction $u$ pour lesquels la fonction $h$ est harmonique.

**Question 3.** Soit $v$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction

$$k : (x, y) \mapsto v\left(\frac{y}{x}\right)$$

sur l'ouvert $\mathrm{U} = ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$.

Trouver tous les choix de la fonction $v$ pour lesquels la fonction $k$ est harmonique.

## Partie II — Principe du maximum

Dans cette partie, on se donne une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, et on suppose que $f$ est harmonique.

On fixe $r > 0$. On note D le disque fermé de rayon $r$ centré en l'origine O ; on note C le cercle qui délimite le disque D.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D} & = & \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leqslant r^2\right\}, \\ \mathrm{C} & = & \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = r^2\right\}. \end{array}$$

Pour tout $p$ dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f_p$ par

$$f_p(x, y) = f(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{p}.$$

**Question 4.** Démontrer l'existence d'un point $\mathrm{M}_p$, dont les coordonnées sont notées $a_p$ et $b_p$, appartenant au disque fermé D, en lequel la fonction $f_p$ atteint son maximum

$$f_p(a_p, b_p) = \max_{(x,y)\in \mathrm{D}} f_p(x, y).$$

**Question 5.** On suppose que le point $\mathrm{M}_p$ est situé dans le disque ouvert $\mathrm{D} \setminus \mathrm{C}$. Montrer alors les inégalités

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leqslant 0.$$

**Question 6.** Calculer le nombre $\Delta f_p(a_p, b_p)$. En déduire que le point $\mathrm{M}_p$ est situé sur le cercle C.

**Question 7.** Pour cette question, on admet le *théorème de Bolzano-Weierstraß*, dont un cas particulier affirme que toute suite bornée de points du plans admet une sous-suite convergente.

Démontrer qu'il existe un point P du cercle C, de coordonnées $a$ et $b$, en lequel la fonction $f$ atteint son maximum sur D

$$f(a,b) = \max_{(x,y)\in \mathrm{D}} f(x,y).$$

**Question 8.** On suppose que $g$ et $h$ sont deux fonctions harmoniques dans le plan et qu'elles coïncident sur le cercle C. Montrer qu'elles coïncident sur le disque D.

**Partie III — Propriété de la moyenne**

Dans cette partie, on se donne une fonction $f$ harmonique dans le plan $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. On fixe un point $\mathrm{M}_0$ du plan, de coordonnées $x_0$ et $y_0$. On définit alors sur l'intervalle $[0,+\infty[$ une fonction F par la formule

$$\mathrm{F}(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos(t), y_0 + \rho\sin(t))\ \mathrm{d}t.$$

**Question 9.** Démontrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et exprimer ses dérivées $\mathrm{F}'$ et $\mathrm{F}''$.

**Question 10.** À l'aide d'une intégration par parties, simplifier l'expression $\rho\mathrm{F}''(\rho) + \mathrm{F}'(\rho)$.

**Question 11.** En déduire que la fonction F est constante. Préciser sa valeur.

---

# Problème II : polynômes de Legendre

On munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ du produit scalaire

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \mapsto (\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout entier $n$, on pose $\mathrm{A}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n$ et $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{2^n \times n!}(\mathrm{A}_n)^{(n)}$.

**Question 12.** Calculer $\mathrm{P}_0$, $\mathrm{P}_1$ et $\mathrm{P}_2$.

**Question 13.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{P}_n$ possède la même parité que $n$. Préciser son degré et son coefficient dominant.

**Question 14.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend un polynôme Q dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer l'égalité

$$(\mathrm{A}_n^{(n)}|\mathrm{Q}) = (-1)^k(\mathrm{A}_n^{(n-k)}|\mathrm{Q}^{(k)}).$$

**Question 15.** En déduire que la famille $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

**Question 16.** Exprimer $||\mathrm{A}_n^{(n)}||^2$ en fonction d'une intégrale de Wallis puis en déduire la valeur de $||\mathrm{P}_n||$.

**Question 17.** Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant de l'égalité

$$\left((\mathrm{X}^2-1)\times(\mathrm{X}^2-1)^n\right)^{(n+2)} = \left(\left((\mathrm{X}^2-1)^{n+1}\right)'\right)^{(n+1)},$$

montrer l'égalité

$$(1-\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'' - 2\mathrm{X}\mathrm{P}_n' + n(n+1)\mathrm{P}_n = 0.$$

**Question 18.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction

$$f_n : t \mapsto (\mathrm{P}_n(t))^2 + \frac{1-t^2}{n(n+1)}(\mathrm{P}'_n(t))^2.$$

En déduire que l'inégalité $|\mathrm{P}_n(t)| \leqslant 1$ est valable pour tout $t$ dans $[-1,1]$.

**Question 19.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

**a.** Montrer qu'il existe $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n+1})$ dans $\mathbb{R}^{n+2}$ vérifiant l'égalité

$$\mathrm{XP}_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}\mathrm{P}_k.$$

**b.** Montrer que le coefficient $a_{n,k}$ est nul pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$ ainsi que pour $k = n$.

**c.** Préciser les valeurs de $a_{n,n-1}$ et de $a_{n,n+1}$ puis en déduire une relation de récurrence entre les polynômes de Legendre.

**d.** Calculer ainsi les polynômes $\mathrm{P}_3$, $\mathrm{P}_4$ et $\mathrm{P}_5$.

**Question 20.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, montrer que le polynôme $\mathrm{P}_n$ est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

**a.** Première méthode : utiliser le théorème de Rolle à répétition.

**b.** Deuxième méthode : montrer que dans le cas contraire, la formule de question 3 serait mise en défaut par un polynôme Q bien choisi.

---

# Problème III : théorème de Courant-Fischer

On considère un espace euclidien E. Sa dimension est notée $n$. Pour tout $k$ dans $[\![0, n]\!]$, on note $\mathcal{G}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension $k$. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note S(F) la sphère unité de F, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de F dont la norme euclidienne vaut 1.

Soit $f$ un endomorphisme symétrique de E. On sait que son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et on écrit

$$\chi_f = (\mathrm{X} - \lambda_1) \times \cdots \times (\mathrm{X} - \lambda_n)$$

avec l'hypothèse $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. On se donne une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k$ dans $[\![1, n]\!]$, le vecteur $e_k$ soit un vecteur propre de $f$ pour la valeur propre $\lambda_k$. Tout ceci est possible en vertu du théorème spectral.

Pour tout entier $k$ dans $[\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{V}_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\mathrm{W}_k = \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)$.

On définit sur E la fonction $\mathrm{R}_f : x \mapsto (x|f(x))$, à valeurs réelles.

Le but de ce problème est de démontrer le *théorème du min-max de Courant-Fischer*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \max_{\mathrm{F}\in\mathcal{G}_k} \min_{x\in\mathrm{S(F)}} \mathrm{R}_f(x) = \min_{\mathrm{F}\in\mathcal{G}_{n-k+1}} \max_{x\in\mathrm{S(F)}} \mathrm{R}_f(x).$$

**Question 21.** Montrer que la fonction $\mathrm{R}_f$ est continue sur E.

**Question 22.** Pour tout sous-espace vectoriel F non trivial de E, justifier que la fonction $\mathrm{R}_f$ possède un maximum et un minimum sur S(F).

**Question 23.** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer les égalités

$$\min_{x\in\mathrm{S}(\mathrm{V}_k)} \mathrm{R}_f(x) = m_k \qquad \text{et} \qquad \max_{x\in\mathrm{S}(\mathrm{W}_k)} \mathrm{R}_f(x) = m_k.$$

**Question 24.** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{G}_k$. Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{W}_k$ a une intersection non triviale. En déduire l'inégalité

$$\min_{x\in\mathrm{S(F)}} \mathrm{R}_f(x) \leqslant m_k.$$

**Question 25.** Démontrer finalement le théorème de Courant-Fischer.

---