Fonctions de plusieurs variables

Théorème (développement limité à l'ordre 1). Soit un entier $p \geqslant 2$. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.
Étant donné un point $a = (a_1, \ldots, a_p)$ de U, la fonction f admet le développement limité suivant au voisinage de a :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \text{grad } f(a) | h \rangle + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(||h||).$$

Démonstration du théorème dans le cas $\mathbf{p = 2}$. Je me contente de rédiger la démonstration dans ce cas car le cas général nécessite d'écrire des formules plus longues et moins lisibles, bien que le principe soit rigoureusement le même.

Fixons $\varepsilon > 0$ et munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme infinie N_∞.
Comme U est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que la boule de rayon r centrée en a soit incluse dans U. Par continuité des dérivées partielles de f, il est possible de choisir r suffisamment petit pour que les majorations suivantes soient valables pour tout $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathrm{B}(a, r)$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Prenons donc un vecteur $h = (h_1, h_2)$ non nul de $\mathbb{R}^2$ de norme strictement majorée par r. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et remarquons cette première égalité

$$f(a+h) - f(a) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) + f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2).$$

Le théorème des accroissements finis donne l'existence d'éléments c_1 et c_2 dans les intervalles $]a_1 - |h_1|, a_1 + |h_1|[$ et $]a_2 - |h_2|, a_2 + |h_2|[$ respectivement, vérifiant les égalités suivantes

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2) \qquad \text{et} \\ f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) &= h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, c_2). \end{aligned}$$

En mettant toutes nos formules bout à bout, on obtient

$$f(a+h) - f(a) - \langle \text{grad } f(a) | h \rangle = h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) + h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right).$$

L'inégalité triangulaire donne ensuite

$$|f(a+h) - f(a) - \langle \text{grad } f(a) | h \rangle| \leqslant |h_1| \times \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right| + |h_2| \times \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, c_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right|$$

puis

$$|f(a+h) - f(a) - \langle \text{grad } f(a) | h \rangle| \leqslant \varepsilon(|h_1| + |h_2|) \leqslant 2\varepsilon \mathrm{N}_\infty(h).$$

Plus précisément, on a montré ceci

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0,\ \forall h \in \mathrm{B}(0, r), \\ &|f(a+h) - f(a) - \langle \text{grad } f(a) | h \rangle| \leqslant \varepsilon(|h_1| + |h_2|) \leqslant 2\varepsilon \mathrm{N}_\infty(h). \end{aligned}$$

On a donc prouvé le développement limité annoncé. ♡

Règle de la chaîne. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit γ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeurs dans U.
La fonction $g = f \circ \gamma$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est donnée par

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad g'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_p(t)) x_i'(t),$$

où l'on a noté $x_1, \ldots, x_p$ les fonctions coordonnées de la fonction vectorielle γ.

Démonstration de la règle de la chaîne. Soit t_0 un élément de I. Pour tout indice i, on connaît le développement limité

$$x_i(t_0 + s) = x_i(t_0) + x_i'(t_0)s + \underset{s \to 0}{\mathrm{o}}(s).$$

Plus précisément, on va écrire que pour chaque indice i, il existe une fonction ε_i de limite nulle en 0 vérifiant l'identité

$$\forall s \in \mathrm{J}, \qquad x_i(t_0 + s) = x_i(t_0) + x_i'(t_0)s + s\varepsilon_i(s),$$

où J désigne l'image de I par la translation $t \mapsto t - t_0$ (l'intervalle dans lequel on fait varier le déplacement s). Introduisons la fonction

$$\vec{\varepsilon} : s \mapsto (\varepsilon_1(s), \ldots, \varepsilon_p(s)).$$

On peut alors écrire

$$\forall s \in \mathrm{J}, \qquad \gamma(t_0 + s) = \gamma(t_0) + s\vec{\gamma}'(t_0) + s\vec{\varepsilon}(s),$$

ce qui est un développement limité à l'ordre 1 pour la fonction vectorielle γ. Rappelons de même le développement limité de la fonction f au point $\gamma(t_0)$

$$f(\gamma(t_0) + \vec{h}) = f(\gamma(t_0)) + \mathrm{d}f(\gamma(t_0)) \cdot \vec{h} + \underset{\vec{h} \to \vec{0}}{\mathrm{o}}(||\vec{h}||).$$

De même, cette formule se réécrit

$$f(\gamma(t_0) + \vec{h}) = f(\gamma(t_0)) + \mathrm{d}f(\gamma(t_0)) \cdot \vec{h} + ||\vec{h}||\eta(\vec{h}).$$

La fonction η est une fonction définie sur une certaine boule ouverte B centrée en l'origine, de limite nulle en l'origine, et le domaine de validité de cette formule est la boule B.

Le vecteur $s\vec{\gamma}'(t_0) + s\vec{\varepsilon}(s)$ tend vers le vecteur nul quand s tend vers 0 donc il existe $s_0 > 0$ tel que pour tout s dans l'intervalle K défini par

$$\mathrm{K} =]-s_0, s_0[\cap \mathrm{J},$$

le vecteur $s\vec{\gamma}'(t_0) + s\vec{\varepsilon}(s)$ soit dans la boule ouverte B. Pour tout s dans K, on peut alors écrire

$$f(\gamma(t_0+s)) = f(\gamma(t_0)+s\vec{\gamma}'(t_0)+s\vec{\varepsilon}(s)) = f(\gamma(t_0))+ \mathrm{d}f(\gamma(t_0))\cdot(s\vec{\gamma}'(t_0)+s\vec{\varepsilon}(s)))+||s\vec{\gamma}'(t_0)+s\vec{\varepsilon}(s))||\times\eta(s\vec{\gamma}'(t_0)+s\vec{\varepsilon}(s))).$$

On utilise la linéarité de la différentielle $\mathrm{d}f(\gamma(t_0))$ puis on regroupe tous les termes qui se factorisent par s ou $|s|$.

$$f(\gamma(t_0 + s)) = f(\gamma(t_0)) + s\ \mathrm{d}f(\gamma(t_0)) \cdot \vec{\gamma}'(t_0) + s\ \mathrm{d}f(\gamma(t_0) \cdot \vec{\varepsilon}(s) + |s| \times ||\vec{\gamma}'(t_0) + \vec{\varepsilon}(s)|| \times \eta(s\vec{\gamma}'(t_0) + s\vec{\varepsilon}(s))).$$

La différentielle $\mathrm{d}f(\gamma(t_0))$ est linéaire donc continue. Le terme $\mathrm{d}f(\gamma(t_0) \cdot \vec{\varepsilon}(s)$ a donc une limite nulle quand s tend vers 0.

De même, le terme $\eta(s\vec{\gamma}'(t_0) + s\vec{\varepsilon}(s)))$ a une limite nulle quand s tend vers 0 car ce qui est dans η tend vers 0.

Enfin, le terme $||\vec{\gamma}'(t_0) + \vec{\varepsilon}(s)||$ tend vers $||\vec{\gamma}'(t_0)||$ quand s tend vers 0.

Tout ceci permet d'obtenir le développement limité

$$f(\gamma(t_0 + s)) = f(\gamma(t_0)) + s\ \mathrm{d}f(\gamma(t_0)) \cdot \vec{\gamma}'(t_0) + \underset{s \to 0}{\mathrm{o}}(s).$$

On en déduit que la fonction g est dérivable en t_0, avec pour dérivée

$$g'(t_0) = \mathrm{d}f(\gamma(t_0)) \cdot \vec{\gamma}'(t_0).$$

C'est vrai pour tout t_0 dans I donc la fonction g est dérivable sur I. De plus, en développant la différentielle, on obtient plus précisément

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad g'(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) x_i'(t).$$

Les fonctions f et γ étant de classe $\mathcal{C}^1$, cette formule prouve que g' est continue. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$. ♡

Théorème de Schwarz. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, à valeurs réelles. Pour tout élément (x_0, y_0) de U, on peut alors écrire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Démonstration du théorème de Schwarz.

L'ensemble U étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que le carré $]x_0 - r, x_0 + r, y_0 - r, y_0 + r[$, qui est une boule ouverte pour la norme infinie de $\mathbb{R}^2$, soit inclus dans U. Pour tout t dans $]-r, r[$, on peut alors poser

$$\mathrm{F}(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t) + f(x_0, y_0).$$

Prenons t dans $[0, r[$. On peut alors écrire

$$f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0 + t, y_0) = \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t, y)\, \mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad f(x_0, y_0 + t) - f(x_0 + t, y_0) = \int_{y_0}^{y_0+t} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)\, \mathrm{d}y$$

puis

$$\mathrm{F}(t) = \int_{y_0}^{y_0+t} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) \right) \mathrm{d}y = \int_{y_0}^{y_0+t} \left(\int_{x_0}^{x_0+t} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, il existe t_0 dans $]0, r[$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in [x_0, x_0 + t_0] \times [y_0, y_0 + t_0], \qquad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Pour tout t dans $[0, t_0]$, on obtient alors

$$\mathrm{F}(t) - t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y_0+t} \left(\int_{x_0}^{x_0+t} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Pour tout t dans $]0, t_0]$, on trouve ensuite

$$\left| \frac{\mathrm{F}(t)}{t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| \leqslant \frac{1}{t^2} \int_{y_0}^{y_0+t} \left(\int_{x_0}^{x_0+t} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{t^2} \int_{y_0}^{y_0+t} \left(\int_{x_0}^{x_0+t} \varepsilon\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe t_0 dans $]0, r[$ tel que pour tout t dans $]0, t_0]$, la majoration $\left| \frac{\mathrm{F}(t)}{t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| \leqslant \varepsilon$ ait lieu.

On en déduit que le quotient $\mathrm{F}(t)/t^2$ tend vers $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ quand t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

De la même manière, pour tout t dans $[0, r[$, on obtient

$$\mathrm{F}(t) = \int_{x_0}^{x_0+t} \left(\int_{y_0}^{y_0+t} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Par le même raisonnement epsilonesque, on montre alors que le quotient $\mathrm{F}(t)/t^2$ tend vers $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ quand t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Par unicité de la limite, on obtient l'égalité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$. ♡

Théorème (condition nécessaire d'extremum local sur un ouvert). Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.
Soit $a \in \mathrm{U}$. On suppose que f admet un extremum local en a. Alors le vecteur $\nabla f(a)$ est nul.

Démonstration. Introduisons les coordonnées de a

$$a = (a_1, \ldots, a_p).$$

Pour simplifier les raisonnements, on suppose que f admet un maximum local en a (pour le cas d'un minimum local, il suffit de renverser les inégalités).

Le fait que U soit ouvert donne l'existence de $r > 0$ tel que l'ensemble

$$]a_1 - r, a_1 + r[\times \cdots \times]a_p - r, a_p + r[$$

soit inclus dans U (c'est la boule ouverte de rayon r centrée en a pour la norme infinie).
Le fait que f ait un maximum local en a signifie qu'en choisissant r suffisamment petit, la restriction de f à la boule ci-dessus admet un maximum en a.

Prenons un indice i entre 1 et p. La fonction partielle

$$f_i : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots a_p)$$

admet alors un maximum en a_i sur l'intervalle ouvert $]a_i - r, a_i + r[$. Sa dérivée en a_i est donc nulle.
Autrement dit, le nombre $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est nul.

C'est vrai pour tout indice i entre 1 et p donc le gradient de f en a est nul. ♡

Théorème des bornes atteintes. Soit A une partie non vide, fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$. Soit f une fonction continue sur U, à valeurs réelles.
Alors f possède un maximum et un minimum (globaux) sur A.

Préambule à la démonstration. Pour démontrer ce théorème, je vais devoir admettre un autre théorème, qui n'est pas à notre programme : le *théorème de Bolzano-Weierstraß*. Ce théorème affirme que toute suite bornée d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède une sous-suite convergente.

Démonstration du théorème des bornes atteintes. Montrons d'abord que f est majorée.

On raisonne par l'absurde, en supposant que f n'est pas majorée sur A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut alors sélectionner un élément x_n de A tel que $f(x_n) \geqslant n$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est alors bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, elle admet une sous-suite convergente. Il existe donc une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et un élément ℓ de E tels que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
L'ensemble A est fermé donc, d'après le critère séquentiel, la limite ℓ est encore un élément de A. La continuité de f donne donc que la suite de terme général $f(x_{\varphi(n)})$ converge vers $f(\ell)$.
Cependant, la minoration $f(x_{\varphi(n)}) \geqslant \varphi(n) \geqslant n$ donne que cette suite tend vers $+\infty$.

On a obtenu une contradiction, qui prouve que f est majorée sur A.

Notons maintenant M la borne supérieure de f sur A. Pour tout entier n strictement positif, on peut alors sélectionner un élément y_n de A tel que

$$f(y_n) \geqslant \mathrm{M} - \frac{1}{n}.$$

La suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ ainsi construite est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, elle admet une sous-suite convergente. Il existe donc une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante et un élément s de E tels que la suite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.
L'ensemble A est fermé donc, d'après le critère séquentiel, la limite s est encore un élément de A. La continuité de f sur A donne donc que la suite de terme général $f(y_{\psi(n)})$ converge vers $f(s)$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on connaît l'encadrement

$$\mathrm{M} \geqslant f(y_{\psi(n)}) \geqslant \mathrm{M} - \frac{1}{\psi(n)} \geqslant \mathrm{M} - \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $f(y_{\psi(n)})$ tend vers M quand n tend vers $+\infty$. On en déduit l'égalité $\mathrm{M} = f(s)$ par unicité de la limite.

On a alors prouvé que la fonction f admet un maximum sur A.

En appliquant ce raisonnement à la fonction $-f$, on voit que $-f$ admet un maximum sur A, si bien que f admet un minimum sur A. ♡

Théorème (développement limité à l'ordre 2). Soit un entier $p \geqslant 2$. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, à valeurs réelles.
Étant donné un point $a = (a_1, \dots, a_p)$ de U, la fonction f admet le développement limité suivant au voisinage de a

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \frac{1}{2}(h|\mathrm{H}_f(a)h) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^2).$$

Démonstration du théorème. On fixe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_f(a,r) \subset \mathrm{U}$.

Soit $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $||h|| \leqslant r$. En particulier, on remarque que pour tout $t \in [0,1]$, le vecteur $a+th$ est dans $\mathrm{B}_f(a,r)$ donc dans U.

On peut donc définir la fonction $\gamma : t \mapsto f(a+th)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$. La règle de la chaîne donne

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma'(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial h_j}(a+th)h_j.$$

Une deuxième dérivation donne alors

$$\forall t \in [0,1], \quad \gamma''(t) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial h_i \partial h_j}(a+th)h_i h_j.$$

En identifiant le vecteur h de $\mathbb{R}^p$ au vecteur colonne qui lui est canoniquement associé, cette formule se réécrit

$$\gamma''(t) = h^{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}_f(a+th) \times h.$$

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 donne

$$\gamma(1) = \gamma(0) + \gamma'(0) + \int_0^1 \gamma''(t)(1-t)\ \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$f(a+th) = f(a) + (\nabla f(a)|h) + \int_0^1 h^{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}_f(a+th) \times h(1-t)\ \mathrm{d}t.$$

On en déduit l'égalité

$$f(a+th) - f(a) - (\nabla f(a)|h) - \frac{1}{2}h^{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}_f(a) \times h = \int_0^1 h^{\mathrm{T}} \times (\mathrm{H}_f(a+th) - \mathrm{H}_f(a)) \times h \times (1-t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on trouve

$$h^{\mathrm{T}} \times (\mathrm{H}_f(a+th) - \mathrm{H}_f(a)) \times h = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} h_i h_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la continuité de la fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ donne l'existence d'un nombre $\alpha_{i,j} \in]0,r[$ tel que

$$\forall y \in \mathrm{B}(a, \alpha_{i,j}), \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right| \leqslant \varepsilon.$$

L'ensemble $\{\alpha_{i,j}\ ;\ (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\}$ est une partie finie et non vide de $]0,+\infty[$ donc il possède un plus petit élément, noté α, qui est strictement positif.

À partir de maintenant, on suppose que $||h|| < \alpha$, ce qui donne

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \forall t \in [0,1], \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire donne alors

$$\forall t \in [0,1], \quad \left|h^{\mathrm{T}} \times (\mathrm{H}_f(a+th) - \mathrm{H}_f(a)) \times h\right| \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} |h_i h_j| \times \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right| \leqslant p^2 \times ||h||_\infty^2 \times \varepsilon.$$

On en déduit alors la majoration

$$\left|\int_0^1 h^{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}_f(a+th) \times h(1-t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|h^{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}_f(a+th) \times h\right| \times (1-t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 p^2 \times ||h||_\infty^2 \times \varepsilon(1-t)\ \mathrm{d}t = \frac{p^2\varepsilon}{2}||h||_\infty^2.$$

On a alors démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^p$ tel que $||h|| < \alpha$, on ait la majoration

$$\left|f(a+th) - f(a) - (\nabla f(a)|h) - \frac{1}{2}h^{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}_f(a) \times h\right| \leqslant \frac{p^2\varepsilon}{2}||h||_\infty^2.$$

On a donc prouvé précisément la formule

$$f(a+th) - f(a) - (\nabla f(a)|h) - \frac{1}{2}h^{\mathrm{T}} \times \mathrm{H}_f(a) \times h \underset{h\to 0}{=} \mathrm{o}(||h||^2),$$

ce qui est la formule attendue. ♡