

Mathématiques avec Python — préparation à l'oral

Exercice 1. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'entiers définie par

$$u_0 = 9, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4(u_n)^3 + 3(u_n)^4.$$

On note c_n le nombre de chiffres 9 terminant l'écriture décimale de u_n .

- a. Écrire une fonction `nombre9(n)` qui renvoie le nombre de 9 terminant l'écriture décimale d'un entier n donné.
- b. Calculer c_n pour tout n dans $\llbracket 0, 10 \rrbracket$.
- c. Conjecturer une expression de c_n puis démontrer la conjecture.
- d. Écrire une fonction `avant9(n)` qui renvoie le chiffre situé à gauche du blocs de chiffres 9 terminant l'écriture décimale de l'entier n ; cette fonction renvoie 0 si l'entier n ne s'écrit qu'avec des 9.
- e. Appliquer cette fonction à u_n pour tout n dans $\llbracket 0, 10 \rrbracket$. Émettre une conjecture puis la démontrer.
- f. On note p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de p_n . Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'encadrement

$$4p_n - 2 \leq p_{n+1} \leq 4p_n + 1$$

puis en déduire un encadrement de la forme $\alpha 4^n \leq p_n \leq \beta 4^n$ valable pour tout entier n .

Exercice 2. Pour tout entier n , on note $\sigma_2(n)$ la somme des chiffres de l'écriture binaire de n et on pose $s_n = (-1)^{\sigma_2(n)}$.

a. Écrire une fonction `binaire(n)` qui renvoie l'écriture binaire de n sous forme d'une liste, où le coefficient d'indice i de la liste est le chiffre en facteur de 2^i dans le développement binaire de n . Par exemple, les appels `binaire(8)` et `binaire(237)` doivent renvoyer les listes $[0, 0, 0, 1]$ et $[1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1]$ respectivement.

b. Exprimer $\sigma_2(2n)$ et $\sigma_2(2n+1)$ en fonction de $\sigma_2(n)$. En déduire des expressions de s_{2n} et s_{2n+1} en fonction de s_n .

c. Écrire une fonction `liste_s(n)` qui renvoie la liste $[s_0, \dots, s_n]$.

d. On pose $S_n = s_0 + \dots + s_n$. Émettre une conjecture sur S_n puis démontrer cette conjecture.

e. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite de terme général $V_n = v_0 + \dots + v_n$ soit bornée. Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

Montrer que la série de terme général $\varepsilon_n v_n$ converge.

f. Montrer que $\prod_{n=1}^N \left(\frac{n}{n+1} \right)^{s_n}$ possède une limite finie et non nulle quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 3. On définit une suite $(P_{i,j})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ en posant $P_{i,1} = 1$ et $P_{1,j} = 1$ puis

$$P_{i,j} = P_{i-1,j} + P_{i,j-1} + X P_{i-1,j-1} \quad \text{si } i \geq 2 \text{ et } j \geq 2.$$

a. Écrire une fonction `poly(i, j)` qui renvoie le polynôme $P_{i,j}$.

b. Calculer $P_{k,7}$ pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.

c. Émettre une conjecture quant au degré de $P_{i,j}$ puis démontrer cette conjecture.

Exercice 4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0, 1]$ et on suppose qu'elle vérifie les relations

A032-17

$$f(0) = 1, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = f(x^2).$$

1. Écrire une fonction `indice(x, h=0.01)` qui prend en entrée un élément x de $[0, 1]$ et renvoie l'entier i tel que $t_i \leq x < t_{i+1}$, où l'on note $t_i = i \times h$.

2. Avec la méthode d'Euler, créer la liste des nombres $f(t_i)$ pour i variant de 0 à n , avec $n = \text{indice}(1)$.

3. Avec Python, représenter graphiquement la fonction f sur $[0, 1]$.

4. On fait l'hypothèse que f est développable en série entière sur $[0, 1]$ et on introduit son développement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

a. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver la relation $a_{2p+1} = a_p / (2p+1)$. Obtenir également l'égalité $a_{2p} = 0$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

b. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, prouver la relation $a_{2p-1} = a_0 \prod_{i=1}^p \frac{1}{2^i - 1}$.

c. On rappelle que tout entier n possède une décomposition de la forme $n = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i 2^i$, où les ε_i valent 0 ou 1.

Montrer que si l'un des ε_i est nul, alors a_n est nul.

5. Synthèse : construire une fonction f solution sur $[0, 1]$ du problème $y'(x) = y(x^2)$.

Exercice 5. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $A_n : \theta \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$ sur $[0, 2\pi]$.

0964-17

a. Tracer le graphe de A_n pour tout n dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ puis pour tout n dans $\llbracket 100, 110 \rrbracket$.

b. Conjecturer le nombre d'extremums locaux de la fonction A_n puis justifier tout cela.

c. Montrer que la fonction A_n est à valeurs positives.

d. On note x_n le premier zéro de la fonction A'_n . Calculer la limite de $A_n(x_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. Pour tout $t \neq -1$, on pose $\varphi(t) = (f(t), g(t))$, avec $f(t) = \frac{t}{1+t^3}$ et $g(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$.

1083-17

a. Tracer avec Python le support de l'arc paramétré φ . Étudier les symétries, réduire l'intervalle d'étude, déterminer le comportement quand le paramètre tend vers -1 .

b. On observe la présence d'une boucle. Estimer numériquement la longueur de cette boucle.

c. Trouver une équation cartésienne de la courbe sous la forme $F(x, y) = 0$.

d. Montrer que les points $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \varphi(t_3)$ sont alignés si et seulement si $t_1 t_2 t_3 = -1$.

Exercice 7. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

1. Trouver le rayon de convergence de cette série entière.
2. Tracer le graphe de S sur un intervalle adapté.
3. On pose $T(x) = xS(x^2)$ quand c'est possible. Exprimer $T'(x)$ puis $T(x)$.
4. Obtenir une expression de $S(x)$ valable pour tout $x > 0$ (dans l'intervalle de convergence) puis une expression valable pour tout $x < 0$.

5. On prend y dans $[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et on pose $u = \frac{1-y}{1+y}$.

Montrer la majoration $|u| \leq 1/4$ et l'égalité $2T(u) = \ln(y)$.

6. Écrire une fonction `approx(y)` qui prend y en entrée et renvoie la valeur de $2 \sum_{n=0}^6 \frac{u^{n+1}}{2n+1}$, où l'on a posé de nouveau $u = (1-y)/(1+y)$.

7. Montrer que `approx(y)` approche $\ln(y)$ à 10^{-10} près.

Exercice 8. On note Γ la courbe tridimensionnelle paramétrée par

$$x(t) = (1 + \cos(t)) \cos(t), \quad y(t) = (1 + \cos(t)) \sin(t), \quad z(t) = 4 \sin(t/2).$$

- a. Déterminer les points réguliers de Γ et le vecteur tangent unitaire en ces points.
- b. Montrer que ce vecteur tangent forme un angle constant avec l'axe (Oz) .
- c. Calculer la longueur de la courbe Γ .
- d. Tracer les projetés orthogonaux de Γ sur les plans (Oxy) , (Oyz) et (Ozx) .

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est noté χ_n .

- a. Écrire une fonction en Python qui renvoie la matrice A_n .
- b. Trouver un lien entre χ_n et χ_{n-1} .
- c. Justifier que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A_n)$ est inclus dans $\mathbb{R}$.
- d. Écrire une fonction en Python qui renvoie la plus grande valeur propre de A_n .

Exercice 10. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, défini par $(X|Y) = X^T \cdot Y$. On note S^{n-1} l'ensemble des vecteurs de norme 1 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *image numérique* de la matrice M l'ensemble

$$W(M) = \{(X|MX) ; X \in S^{n-1}\}.$$

a. Écrire une fonction `rand.unit(n)` qui renvoie un vecteur aléatoire de S^{n-1} . Pour cela, on créera un vecteur aléatoire à coefficients dans $[-1000, 1000]$ et on le divisera par sa norme.

b. On choisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Représenter graphiquement l'image numérique de A et calculer les valeurs propres de A.

c. Représenter l'image numérique de $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et de $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Dans le cas général, montrer que M a la même image numérique que sa partie symétrique $M_s = \frac{M + M^T}{2}$.

e. Soit T une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son image numérique est le segment $[\lambda, \mu]$ avec $\lambda = \min(\text{Sp}(T))$ et $\mu = \max(\text{Sp}(T))$.

Exercice 11. On fixe un entier $p \geq 3$.

1091-17

Pour tout (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$, on appelle *matrice bande* $[a, b, c]$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivante

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix}.$$

On note en particulier A la matrice bande $[-1, 3, -1]$.

a. Montrer que la matrice A est inversible.

Soit $B \in \mathbb{R}^n$. On note X^* l'unique solution du système linéaire $AX = B$. Ce système se réécrit $X = CX + B/3$ en posant $C = I_p - A/3$.

b. On note T l'application $X \mapsto CX + B/3$, définie de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$. Quelle est la valeur de $T(X^*)$?

c. Écrire une fonction `matBande(p, b, a)` qui renvoie la matrice bande $[b, a, b]$ puis une fonction `T(p, X)` qui renvoie la colonne $T(X)$.

d. Dans le cas $B = (1, \dots, 1)$ et $p = 5$, effectuer l'application numérique : calculer A^{-1} et obtenir une valeur approchée de X^* .

e. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie. Montrer que T est k -lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$ à préciser.

f. On définit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^p$ en prenant X_0 quelconque puis en posant $X_{n+1} = T(X_n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la majoration $\|X_{n+1} - X_n\|_\infty \leq k^n \|X_1 - X_0\|$ puis en déduire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer plus précisément que la limite de cette suite de vecteurs est le vecteur X^* .

g. Tester ce phénomène de convergence sur l'exemple de la question d.

1099-17

Exercice 12. Pour tout t dans $[0, +\infty[$, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que les valeurs propres de $M(t)$ sont réelles. On les note $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ dans l'ordre croissant.

b. Écrire une fonction `classer(triplet)` qui trie (en place) le triplet dans l'ordre croissant (cette fonction ne renvoie pas de résultat).

- c. Représenter sur un même graphe les fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
- d. Calculer le polynôme caractéristique χ_t de la matrice $M(t)$.
- e. Pour tout $t \geq 0$, montrer l'encadrement $\lambda_1(t) < -1 < \lambda_2(t) < 1 < \lambda_3(t)$.
- f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\chi_t(x)$ quand t tend vers $+\infty$. En déduire les limites des fonctions λ_i en $+\infty$.

Exercice 13. On définit une fonction φ sur $\mathbb{R}$ en posant

0984-17

$$\forall x \geq 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(2\sqrt{x} \sin(t)) \, dt, \quad \forall x \leq 0, \quad \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2\sqrt{-x} \sin(t)) \, dt.$$

- a. Représenter la fonction φ sur $[-3, 5]$ et sur $[-1000, 0]$.
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(t) \, dt$.
- c. Développer la fonction φ en série entière au voisinage de 0.
- d. Déterminer la limite de φ en $+\infty$.
- e. Montrer que φ est positive sur $[-1, +\infty[$, croissante sur $[-2, +\infty[$, de dérivée croissante sur $[-3, +\infty[$.

Exercice 14. On pose $A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)} \, dx$.

1034-17

- a. Montrer que cette intégrale converge et calculer une valeur approchée à l'aide de Python.
- b. Montrer l'égalité $A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} \, dx$.
- c. Pour tout $y > 0$, prouver l'égalité $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} \, dx = - \int_y^{2y} \frac{e^{-x}}{x} \, dx$.
- d. En déduire la valeur de A .

Exercice 15. On fixe un élément λ de $]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation $e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \lambda$.

1102-17

- a. Montrer que (E_n) possède dans $[0, +\infty[$ une unique solution. On la note a_n .
- b. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- c. Calculer les premiers termes avec Python. Conjecturer la valeur de la limite de a_n puis démontrer cette conjecture.
- d. Calculer $a_n - n$ pour quelques valeurs de n . Trouver un développement asymptotique de a_n .

Exercice 16. On définit sur $[0, 1]$ la fonction $f : x \mapsto x(1-x) \cos(5\pi x)$.

1040-17

- a. Tracer le graphe de f et évaluer le maximum de cette fonction sur $[0, 1]$, noté M .
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t)^n \, dt$. Calculer quelques valeurs de cette intégrale.
- c. On pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^n I_k x^k$ et $a = 1 + 1/M$. Représenter la fonction S_n sur $[-a, a]$ pour quelques valeurs de n .
- d. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum I_k x^k$.

Exercice 17. Soient $X_1, \dots, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose

$$T = \min \{j \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket ; X_j \in \{X_1, \dots, X_{j-1}\}\}.$$

a. Vérifier que T est bien définie.

b. Écrire une fonction `indice_t(liste_x)` qui prend en argument la liste $[X_1, \dots, X_{n+1}]$ et renvoie la valeur de T . Par exemple, l'appel `indice_t([1, 2, 3, 1, 2, 3])` doit renvoyer la valeur 4.

c. Pour tester tout ceci, on choisit $n = 1000$. Écrire une fonction `moyenne_T(N, n=1000)` qui prend en argument le nombre d'essais N et effectue N évaluations de T puis renvoie la moyenne des N valeurs obtenues.

d. Donner l'univers image $T(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}(T > k)$.

e. En déduire la valeur $\mathbb{E}(T) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

Exercice 18. Aux cinq sommets d'un pentagone sont disposés des joueurs de discoplane. Au début du jeu, deux des joueurs, voisins immédiats, ont entre les mains un discoplane. Ils envoient leur discoplane à gauche ou à droite et les receveurs font de même à l'étape suivante. Le jeu s'arrête lorsque les deux discoplans sont entre les mains d'un même joueur. Le nombre d'étapes du jeu est une variable aléatoire notée T .

a. Simuler cette expérience et estimer numériquement l'espérance de T .

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la probabilité qu'à l'étape n , les deux discoplans soient entre les mains de deux joueurs voisins et b_n la probabilité qu'ils soient entre les mains de deux joueurs distincts et non voisins.

On pose alors

$$A(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad B(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n \quad \text{puis} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) z^n.$$

Exprimer $f(z)$ en fonction de $A(z)$ et $B(z)$.

c. Conclure.

Exercice 19. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes qui suivent la même loi. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_k . On définit

$$Y = \sum_{k=1}^N X_k.$$

a. Dans cette question, la loi des X_k est $\mathcal{B}(50, 1/50)$ et celle de N est $\mathcal{P}(1/12)$.

Écrire une fonction qui simule la variable aléatoire Y . Réaliser dix fois de suite une série de 1000 expériences et donner la moyenne et l'écart-type de Y .

b. On se replace dans le cas général. Exprimer la fonction génératrice G_Y en fonction de G_{X_1} et de G_N . En déduire l'espérance de Y .

Qu'obtient-on dans le cas où X_1 suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et N suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$?

Exercice 20. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n . Le premier joueur tire des boules de l'urne sans remise ; il s'arrête quand il obtient la boule portant le numéro n . On note X_1 le nombre de tirages effectués par le premier joueur. Le deuxième joueur effectue ensuite des tirages sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule portant le numéro maximal parmi les boules restantes. On note X_2 le nombre de tirages effectués par le deuxième joueur (avec la convention $X_2 = 0$ si $X_1 = n$).

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1 .

b. Déterminer la loi de X_2 sachant $[X_1 = j]$. En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.

c. Écrire une fonction qui simule X_1 et X_2 .