Recueil des oraux de mathématiques
PC* — lycée Henri Poincaré

Exercice 1. (Centrale PC, 2017, Léonie Fagot)

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donner la loi de S_n.

2. Dans quelle mesure peut-on dire que S_n/n est proche de p ? (Puis : démontrer la loi faible des grands nombres.)

Soit $t \in \mathbb{N}$. On lui associe la variable aléatoire

$$N_t = \mathrm{Card}\,\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_k \leqslant t\}\,.$$

On remarque alors l'égalité $[N_t = k] = [S_k = t] \cap [S_{k+1} = t]$.

3. Déterminer la loi de N_t.

4. Déterminer la fonction génératrice de N_t.

Exercice 2. (Centrale Python PC, 2017, Léonie Fagot)

On considère l'équation différentielle $\sqrt{1+t^2}y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0$.

1. Tracer les solutions f et g soumises aux conditions initiales

$$(f(0), f'(0)) = (0, 1) \qquad \text{et} \qquad (g(0), g'(0)) = (1, 0).$$

L'une d'elles vous semble-t-elle évidente ?

2. Chercher l'autre solution sous la forme d'une somme de série entière.

3. Pour tout t dans $]-1, 1[$, prouver l'égalité $g(t) = \sqrt{1+t^2}$.

Exercice 3. (Mines-Ponts PC, 2017, Clément Legris)

On téléphone à n personnes. Chaque personne a une probabilité p de répondre à l'appel. On note X_1 le nombre de personnes qui répondent à ce premier appel.

On effectue ensuite une deuxième vague d'appel à destination des personnes qui n'ont pas répondu la première fois. On note X_2 le nombre de personnes qui répondent au deuxième appel.

On répète le processus jusqu'à ce que tout le monde ait répondu. Pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, on note Y_j le numéro de l'appel auquel la j-ième personne a répondu. On note N le nombre total de vagues d'appels.

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

2. Donner la loi de Y_j.

3. Déterminer les lois de X_1 et X_2.

4. Calculer l'espérance de N.

Exercice 4. (Mines-Ponts PC, 2017, Clément Legris)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive de limite nulle.

On note D l'ensemble des $a > 0$ tels que la série de terme général $(u_n)^a$ converge.

1. Montrer que si D est non vide, alors c'est un intervalle de la forme $[s, +\infty[$ ou $]s, +\infty[$.

2. Donner un exemple où D est vide et un exemple où D est de la forme $]s, +\infty[$.

Exercice 5. (Mines-Ponts PC, 2017, Inconnu)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Trouver la limite de f en $+\infty$ puis un équivalent.

Exercice 6. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

2. Trouver une matrice P de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & -x & + & 4y \\ y' & = & -x & + & 3y. \end{array} \right.$

Exercice 7. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+n^2x^2}$ et on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

2. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? Pour tout a dans $]0, 1]$, montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$. On pourra effectuer un changement de variable.

Exercice 8. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^5 + \mathrm{A}^4 + \mathrm{A}^3 + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} = 0$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$.

3. En déduire que A est la matrice nulle.

Exercice 9. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Soit $p \in]0, 1[$. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathrm{GN}(p)$ signifie que

$$\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = pq^k,$$

où l'on a posé $q = 1 - p$.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathrm{GN}(p)$. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{X} + 1$. Reconnaître la loi de S. En déduire l'espérance de X.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathrm{GN}(p)$. On pose $\mathrm{Z} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n) = q^n$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\mathrm{Z} \geqslant n)$.

3. Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

On lance une pièce dont une probabilité de faire Pile vaut p. Pour tout entier i, on note F_i l'événement « On obtient Face au i-ième lancer. ».

On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de Face avant le premier Pile.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $(\mathrm{T} = k)$ en fonction des F_i.

5. Déterminer la loi de T et son espérance.

6. On reprend les variables aléatoires $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ de la question 2 et on pose $\mathrm{D} = |\mathrm{X} - \mathrm{Y}|$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de D sachant $(\mathrm{Z} = k)$. En déduire la loi de D.

Exercice 10. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer l'événement $[\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2 = n]$ comme réunion disjointe d'événements, de manière à calculer sa probabilité.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2 = n) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1 = n)$. En déduire la loi de $\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2$.

3. On suppose que X_1 et X_2 représentent le temps d'attente à deux guichets de gare distincts. Comment interpréter l'événement $[\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2 > 0]$?

Exercice 11. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Énoncer le théorème des séries alternées dans sa totalité.

2. Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{x+k+1}$.

4. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $2f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k+1)(x+k)}$.

5. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

6. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

7. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p_1)$ et $\mathcal{G}(p_2)$. Déterminer la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 13. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec $D = \text{diag}(1, 2, 4)$.

3. On considère l'équation $M^2 = D$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que si M est solution, alors elle commute avec D. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.

4. Résoudre l'équation $X^2 = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 14. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. On lui associe la fonction

$$f : (x, y) \mapsto g\left(\frac{y}{x}\right),$$

définie sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y'(t) + 2ty(t) = 0$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

3. Déterminer les choix de g pour lesquels $\Delta f = 0$.

Exercice 15. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit f un endomorphisme de E. On fait les hypothèses

$$f^3 + f = 0 \qquad \text{et} \qquad f \neq 0.$$

1. Calculer $\text{dét}(-\text{Id}_E)$. En déduire que f^2 est différent de $-\text{Id}_E$ puis que f n'est pas injectif.

2. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

3. Montrer que $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

4. Montrer l'existence d'un vecteur x de E tel que $f^2(x) \neq 0_E$ puis montrer que pour un tel vecteur x, la famille $(f(x), f^2(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$.

5. Montrer que $\text{Ker}(f^2 + \text{Id}_E)$ est de dimension 2.

6. Écrire la matrice de f dans une base bien choisie.

Exercice 16. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto n^a x^n (1 - x)$ sur $[0, 1]$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

2. Étudier la convergence uniforme.

Exercice 17. (Centrale PC, 2017, Clément Legris)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t+t^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $f'(x) = \dfrac{2}{x}\int_0^{+\infty} \dfrac{t\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Déterminer la limite de f' en $+\infty$.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 18. (CCP PC, 2017, Morgane Bray)

Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\mathrm{e}^{-1/t}$.

1. Montrer que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

2. En déduire que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe. On la note $h(x)$.

3. Montrer que les solutions de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}(h(x)+k)$, où k est une constante réelle.

4. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité $\mathrm{e}^{1/x}h(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+xu}\,\mathrm{d}u$.

On pourra considérer le changement de variable $t = \dfrac{x}{1+xu}$.

5. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+xu}\,\mathrm{d}u$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

6. Montrer que $g : x \mapsto xf(x)$ est solution de $x^2y'(x) + y(x) = x$ sur $[0,+\infty[$ et que c'est la seule.

7. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$.

8. Trouver la limite de g en $+\infty$.

Exercice 19. (CCP PC, 2017, Morgane Bray)

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $g = p + \alpha \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

1. Calculer g^2.

2. On suppose que g est bijectif. Trouver une expression de g^{-1}.

Exercice 20. (Mines-Ponts PC, 2017, Élise Lepage)

Soit E un espace euclidien. Soit s un endomorphisme de E. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

- $\exists x \in \mathbb{R},\quad \forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\quad (s(x)|s(y)) = c(x|y)$;
- $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\quad ((x|y) = 0 \Rightarrow (s(x)|s(y)) = 0)$.

Exercice 21. (Mines-Ponts PC, 2017, Élise Lepage)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $\left(\dfrac{n}{n+\alpha}\right)^{n\ln(n)}$.

Exercice 22. (Mines-Ponts PC, 2017, Élise Lepage)

On lance deux dés équilibrés. Les résultats sont notés X_1 et X_2. Le plus petit des deux est noté X. Le plus grand est noté Y.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.

2. En déduire l'espérance de Y (on considérera $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$).

3. Simplifier $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ et en déduire la covariance de (X,Y).

Exercice 23. (CCP PC, 2017, Inconnu)

On se donne un entier $n \geqslant 3$ et on note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la deuxième ligne et de la deuxième colonne, qui valent 1.

1. Calculer M^2.

2. Montrer que M est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Exercice 24. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$.

1. Pour tout $\varepsilon \in [0,1[$, calculer $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$.

2. En déduire que $f(0)$ existe et calculer sa valeur.

3. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

4. Pour tout x réel, prouver l'égalité $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

5. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

7. Pour tout x réel, prouver l'égalité $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 25. (X-ESPCI PC, 2017, Inconnu)

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on suppose que son déterminant est impair.

On se donne $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \in \{\pm 1\}^4$ et on pose $\mathrm{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} a\varepsilon_1 & b\varepsilon_2 \\ c\varepsilon_3 & d\varepsilon_4 \end{pmatrix}$.

Montrer que la matrice A_ε est inversible.

Généraliser.

Exercice 26. (X-ESPCI PC, Inconnu)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Montrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

- la série $\sum a_n$ converge ;
- la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$ converge et $a_n = \mathrm{o}(1/n)$.

Exercice 27. (CCP PC, 2017, Florentin Belva)

On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout x réel convenable.

1. Montrer que G est définie sur $\mathbb{R}$. On admet que F l'est aussi.

2. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $\mathrm{G}(x) = x\mathrm{G}(1)$.

3. Pour tout x réel, montrer l'encadrement $0 \leqslant \mathrm{G}(x) - \mathrm{F}(x) \leqslant \pi/2$. En déduire que $\mathrm{F}(x)$ est équivalent à $x\mathrm{G}(1)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée seconde est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}''(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y''(x) - 4y(x) = \pi - 4x\mathrm{G}(1)$ sur $]0, +\infty[$.

6. En déduire une expression de F sur $]0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28. (CCP PC, 2017, Florentin Belva)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On suppose que f est de rang 1 et que f^2 n'est pas l'endomorphisme nul.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

2. Montrer qu'il existe une constante λ complexe telle que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 29. (Centrale PC, 2017, Florentin Belva)

Pour tout polynôme réel P, on pose $\Delta\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

1. Justifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Déterminer son noyau et son image.

2. Justifier l'existence et l'unicité d'une base $(\mathrm{B}_0, \dots, \mathrm{B}_n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ telle que

$$\mathrm{B}_0 = 1, \qquad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \Delta\mathrm{B}_k = \mathrm{B}_{k-1}.$$

Exercice 30. (Centrale Python PC, 2017, Florentin Belva)

Pour tout couple (p, n) d'entiers naturels, on pose $a_{n,p} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^p \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que ces intégrales sont bien définies et qu'à p fixé, la suite $(a_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Programmer une fonction `a(n, p)` qui calcule l'intégrale $a_{n,p}$.

3. On note $\mathrm{I}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que cette intégrale converge et programme une fonction `I(p)` qui en calcule une valeur.

4. Trouver une formule explicite pour $\mathrm{I}(2k+1)$ si k est un entier.

5. Calculer $n^{(p+1)/2}a_n/\mathrm{I}(p)$ pour n variant de 1 à 500 pour quelques valeurs de p et émettre une conjecture.

Exercice 31. (CCP PC, Lina El Hajji)

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$. Pour tout entier n, on note f_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ induit par f.

1. Donner la matrice de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

2. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrer que $\mathrm{P} - \mathrm{P}(0)$ admet une infinité de racines. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Déterminer le noyau et l'image de f_n.

4. Prouver que f est surjective.

5. Trouver tous les polynômes P tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$.

6. En déduire une expression simple de $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 32. (CCP PC, Lina El Hajji)

Pour tout x réel convenable, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer que $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Commentaire du transcripteur. On dirait bien qu'il faut utiliser le théorème de la double limite, que j'ai donné mais qui n'est pas au programme. Je vais signaler la chose.

Exercice 33. (Centrale PC, 2017, Morgane Bray)

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$.

2. Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer qu'il existe un constante réelle K telle que $\forall x > 0,\ f'(x) = \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x^2}$.

Exercice 34. (Centrale Python PC, 2017, Morgane Bray)

Pour tout entier $n \geqslant 3$, on note C_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la première ligne, de la dernière ligne et de la première colonne, qui valent 1.

1. Écrire une fonction `c(n)` qui renvoie la matrice C_n.

2. On note σ_n le spectre de la matrice C_n. Pour n variant de 3 à 6, calculer (avec Python) le nombre $(\lambda-1)^2$ pour tout $\lambda \in \sigma_n$.

En déduire une conjecture sur les valeurs propres de C_n.

3. Pour tout $n \geqslant 4$, montrer que C_n admet une valeur propre multiple et minorer sa multiplicité.

4. On note P_n le polynôme caractéristique de C_n. Calculer $\mathrm{P}_n(1)$ et en déduire l'ensemble σ_n.

5. On note u_n l'endomorphisme canoniquement associé à C_n. Retrouver le résultat de la question 4 en cherchant directement les vecteurs propres de u_n. Donner une base de vecteurs propres pour u_n.

6. Montrer que la famille $(\mathrm{C}_n, \mathrm{C}_n^2, \mathrm{C}_n^3)$ est liée.

Exercice 35. (Centrale PC avec Python, 2017, Aya Lamhandaz)

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0,1]$ et on suppose qu'elle vérifie les relations

$$f(0) = 1, \qquad \forall x \in [0,1], \qquad f'(x) = f(x^2).$$

1. Écrire une fonction `indice(x, h=0.01)` qui prend en entrée un élément x de $[0,1]$ et renvoie l'entier i tel que $t_i \leqslant x < t_{i+1}$, où l'on note $t_i = i \times h$.

2. Avec la méthode d'Euler, créer la liste des nombres $f(t_i)$ pour i variant de 0 à n, avec $n =$ indice(1).

3. Avec Python, représenter graphiquement la fonction f sur $[0,1]$.

4. On fait l'hypothèse que f est développable en série entière sur $[0,1]$ et on introduit son développement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

a. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver la relation $a_{2p+1} = a_p/(2p+1)$. Obtenir également l'égalité $a_{2p} = 0$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

b. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, prouver la relation $a_{2^p-1} = a_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i - 1}$.

c. On rappelle que tout entier n possède une décomposition de la forme $n = \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon_i 2^i$, où les ε_i valent 0 ou 1.

Montrer que si l'un des ε_i est nul, alors a_n est nul.

5. Synthèse : construire une fonction f solution sur $[0,1]$ du problème $y'(x) = y(x^2)$.

Exercice 36. (Centrale-Supélec PC, 2017, Raphaël Bolut)

Soit a un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres, répétées selon leurs multiplicités.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathcal{G}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, prouver l'égalité

$$\lambda_k = \min_{\mathrm{V} \in \mathcal{G}_k} \max_{x \in \mathrm{V} \setminus \{0\}} \mathrm{R}_a(x),$$

où l'on pose $\mathrm{R}_a(x) = (x|a(x))/||x||^2$.

Exercice 37. (Centrale Python PC, 2017, Raphaël Bolut)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_n = (1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2)^n$ et on introduit ses coefficients

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{n,k} \mathrm{X}^k.$$

En particulier, on note $b_n = a_{n,n}$. On admet provisoirement l'égalité $b_n = \sum_{n \leqslant 2k \leqslant 2n} \binom{k}{2k-n}\binom{n}{k}$.

1. Écrire une fonction `b(n)` en Python pour calculer b_n. Pour le calcul des coefficients binomiaux, on utilisera

```
from scipy.special import binom
```

2. Calculer $\ln(b_n)/(n\ln(3))$ pour n variant de 1 à 40. Commenter.

3. Montrer les égalités $b_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{P}_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-nit}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (1+2\cos(t))^n\,\mathrm{d}t$.

4. Effectuer les changements de variable $u = \tan(t/2)$ puis $s = u\sqrt{n}$.

5. En déduire que b_n admet un équivalent de la forme $\lambda 3^n/\sqrt{n}$ pour une certaine constante $\lambda > 0$.

Exercice 38. (CCP PC, 2017, Raphaël Bolut)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $u_n = \mathrm{e}^{-n^2x}$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ lorsque c'est possible.

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$ mais que f est quand même continue sur cet intervalle.

3. Montrer que $f - u_0$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et exprimer son intégrale en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$. La fonction f est-elle intégrable sur cet intervalle ?

4. On admet provisoirement l'encadrement $g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) + 1$ avec $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t$. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

5. Démontrer cet encadrement.

Exercice 39. (CCP PC, 2017, Raphaël Bolut)

Montrer que $(\mathrm{X}-1)^3$ divise $n\mathrm{X}^{n+2} - (n+2)\mathrm{X}^{n+1} + (n+2)\mathrm{X} - n$.

Exercice 40. (CCP PC, 2017, Inconnu)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 41. (Mines-Télécom PC, 2017, Raphaël Bolut)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{A}^k = \mathrm{I}_n$. Montrer que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}_n$.

Trouver une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ symétrique et non diagonalisable.

Exercice 42. (Mines-Télécom PC, 2017, Raphaël Bolut)

On considère une pièce dont la probabilité de faire `pile` est notée p.
On lance cette pièce n fois. Quelle est la probabilité que `face` n'ait jamais été suivi de `pile` ?

Question subsidiaire. Interpréter ce résultat dans le cas $p = 1/2$.

Exercice 43. (TPE-EIVP PC, 2017, Raphaël Bolut)

On note $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

2. Trouver la distance de la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 44. (TPE-EIVP PC, 2017, Raphaël Bolut)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n \mathrm{e}^{-t}}$ sur $[0,+\infty[$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 45. (Mines-Télécom PC, 2017, Bérenger Fister)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1/\operatorname{ch}(x^n)$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 46. (Mines-Télécom PC, 2017, Bérenger Fister)
On considère la matrice $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\mathrm{U}, \mathrm{U}^2)$ est une famille libre.

2. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{U}^3 = a\mathrm{U}^2 + b\mathrm{U}$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{U}^n = \alpha_n \mathrm{U}^2 + \beta_n \mathrm{U}$.

4. Exprimer α_{n+2} en fonction de α_{n+1} et α_n.

5. En déduire une expression de α_n en fonction de n.

Exercice 47. (CCP PC, 2017, Joris Rokitowski)
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$ puis trouver sa limite en $+\infty$.

Exercice 48. (X-ESPCI PC, 2017, Romain Parello)

Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, prouver l'inégalité $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n \displaystyle\sum_{i=1}^n (x_i)^2$.

Exercice 49. (Mines-Ponts PC, 2017, Romain Parello)
Pour tout x dans $]0,+\infty[$, prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 50. (Mines-Ponts PC, 2017, Romain Parello)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Exercice 51. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+4n-1}{n+2} x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 52. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que AB et BA ont le même spectre.

Exercice 53. (TPE-EIVP PC, 2017, Inconnu)

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.

2. Y a-t-il convergence normale sur $\mathcal{D}_f$? sur les segments de $\mathcal{D}_f$?

Exercice 54. (TPE-EIVP PC, 2017, Inconnu)

Pour tout λ réel, on note (E_λ) l'équation différentielle $xy' - (1+\lambda)y = 0$.

1. Résoudre (E_λ) sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$.

2. On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}' - \mathrm{P}$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 55. (TPE-EIVP PC, 2017, Inconnu)

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe k dans $]0,1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = k \times \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n).$$

Déterminer la loi de X.

Exercice 56. (CCP PC, 2017, Inconnu)

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles positives. Pour tout élément f de E, on définit la fonction $\phi(f)$ par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

On note f_0 la fonction constante égale à 1 puis, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \phi(f_n)$.

1. L'ensemble E est-il un espace vectoriel ?

2. Pour toute f de E, montrer que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer sa dérivée. L'application ϕ est-elle injective ? surjective ?

3. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n x^{\beta_n}$. On donnera des relations de récurrence et on exprimera β_n en fonction de n.

4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par une constante strictement positive puis obtenir la minoration

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leqslant \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{4 - 2^{-n}}.$$

En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge et exprimer sa limite.

5. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une certaine fonction f et déterminer cette fonction. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 57. (X-ESPCI PC, 2017, Élise Lepage)
Soit $c > 0$. Trouver toutes les fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \geqslant 0, \quad c\int_0^x f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t\right)^2.$$

Exercice 58. (X-ESPCI PC, 2017, Élise Lepage)
Soient p_1 et p_2 deux projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur si et seulement si $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$.

2. Montrer que $p_1 + p_2$ est une symétrie si et seulement si c'est Id_{E}.

Exercice 59. (Centrale PC, 2017, Julien Nonin)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\alpha \in]0, 1]$.

On suppose que :
- la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$;
- la fonction f' est décroissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$;
- $f'(x) \underset{+\infty}{\sim} f'(x+1)$.

1. Montrer que $f(x+\alpha) - f(x) \underset{+\infty}{\sim} \alpha f'(x)$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\mathrm{Arctan}\left(n + \dfrac{1}{2}\right) - \mathrm{Arctan}(n)\right) x^n$.

Exercice 60. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)
Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 61. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)
Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Exercice 62. (Centrale PC, 2017, Inconnu)
Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

1. On suppose que $\mathrm{Vect}(u, v)$ possède un élément inversible. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

2. La réciproque est-elle vraie ?

3. Montrer que la réciproque est vraie si u et v commutent.

Exercice 63. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)
Peut-on truquer deux dés à 6 faces pour que leur somme suive une loi uniforme ?

Exercice 64. (Mines-Télécom PC, 2017, Inconnu)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$. Soient a et b deux vecteurs de E non colinéaires. On définit l'endomorphisme f de E par

$$f(x) = (a|x)a + (b|x)b.$$

a. Donner le format de la matrice de f dans une base quelconque de E.

b. Déterminer le noyau et l'image de f.

c. L'endomorphisme f est-il symétrique ?

Exercice 65. (Centrale Python PC, 2017, Inconnu)

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n : x \mapsto nx^3 + n^2x - 2$.

1. Montrer que la fonction f_n s'annule exactement une fois dans $\mathbb{R}$. Son point d'annulation est noté a_n.

2. Écrire une fonction `a(n)` en Python qui renvoie une valeur approchée de a_n.

3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante puis qu'elle converge.

4. Représenter $n^2 a_n$ pour n variant de 10 à 100. Formuler une conjecture sur le comportement de a_n quand n tend vers $+\infty$.

5. En revenant à la définition de a_n, trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

6. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

7. Selon la valeur de α, préciser la nature de la série de terme général $n^\alpha \left(a_n - \dfrac{2}{n^2}\right)$.

8. Pour tout x dans $[0, 1]$, on pose $g(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$. Montrer que g est croissante sur $[a_2, 1]$.

9. On pose $x_0 = 1$ puis $x_{p+1} = g(x_p)$ pour tout p dans $\mathbb{N}$. Montrer que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers a_2.

Exercice 66. (Centrale PC, 2017, Romain Parello)

Soit f une fonction continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit y une solution de l'équation différentielle (E) suivante

$$y''(x) + f(x)y(x) = 0.$$

1. On suppose que y est bornée sur $[0, +\infty[$. En déduire que $f \times y$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ puis que y' possède une limite nulle en $+\infty$.

2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E). On leur associe la fonction

$$\mathrm{W} : t \mapsto \text{dét} \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que la fonction W est constante et en déduire qu'il existe des solutions de (E) non bornées.

Exercice 67. (CCP PC, 2017, Théo Ozga)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $n(u_{n+1} - u_n)$ tende vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ diverge.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 68. (CCP PC, 2017, Théo Ozga)

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et un nombre réel α. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ du produit scalaire défini par

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose

$$\phi(\mathrm{P}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f_\alpha(\mathrm{P}) = \mathrm{P} + \alpha \mathrm{X}\phi(\mathrm{P}).$$

1. Montrer que ϕ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{R}$.

2. On choisit maintenant $n = 3$. Montrer que f_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et écrire sa matrice relativement à la base canonique. Déterminer ensuite le spectre de cette matrice et en déduire que f_α est bijectif. Est-il diagonalisable ?

3. On revient au cas général. Déterminer le rang de ϕ. En déduire que l'orthogonal de $\mathrm{Ker}(\phi)$ est $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

4. *Des questions avec des inégalités entre normes faisant intervenir Cauchy-Schwarz.*
