Compte rendu du devoir surveillé n° 1

Thèmes abordés. Polynômes, fonctions d'une variable réelle.

Ce premier devoir surveillé était un sujet de concours donné jadis dans la filière ECS (ESCP 2004).

La notation. Sur les copies, je gratifie chaque question d'une note sur 4. En particulier, le chiffre 4 dans la marge signifie que la question est réussie. J'attribue néanmoins à chaque question un nombre de points, ainsi qu'on le fait dans tout barème. Mon tableur s'occupe de calculer votre total de points. Pour cela, pour chaque question, il multiplie la note sur 4 (que j'appelle parfois le *pourquatrage*) par le nombre de points de la question, et il additionne tout à la fin. Je choisis ensuite un taux de conversion, par lequel je divise le total, en arrondissant au dixième de point supérieur pour constituer la note finale.

Sur ce devoir, le total de tous les points de toutes les questions était de 54,5, si bien que votre total est à considérer sur un maximum de 218. J'ai choisi un taux de conversion égal à 4,8 pour des raisons qu'il serait trop long de détailler.

Les notes finales des 25 copies corrigées s'étalent de 1,4 à 16,4, avec une médiane de 5,8, une moyenne de 6,39 et un écart-type de 3,9. Un bilan très sévère, qui indique que la grande majorité d'entre vous ne sont pas prêts du tout pour passer les concours, mais pas de panique, il reste quelques mois pour vous préparer.

Partie 1

Le maximum de points réalisable sur l'exercice 1 est de 32. La moyenne de la classe sur cette partie est de $10,15$. Le meilleur total est de $31,75$ (presque !).

	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6
Barème	1	1	0,5	1	1,5	3
Réussite	32,2 %	62,7 %	78,8 %	77,4 %	7,7 %	13,5 %

Les quatre premières questions étaient très faciles mais la première a souvent été ratée à cause d'une division mal justifiée : dire que la fonction f n'est pas la fonction nulle ne suffit pas pour diviser par $f(nx)$, encore faut-il choisir un x pour lequel on peut effectivement diviser.

Les deux dernières questions sont plus délicates.

À la question I.5, beaucoup cherchent à prouver que la réponse est oui et il faut reconnaître qu'il y a peu d'éléments à ce stade du problème qui indiquent l'inverse. Peu d'éléments certes mais l'expression de la fonction A pouvait tout de même mettre la puce à l'oreille : pourquoi avoir cette constante $1/2$ alors que les constantes sont des éléments de $\mathscr{E}$?

À cette question, je lis beaucoup d'erreurs de calcul (on magouille comme on peut pour réussir à conclure que la réponse est oui) et beaucoup d'erreurs de logique (ma méthode ne permet pas de conclure donc la réponse est non).

Beaucoup d'erreurs de logique aussi à la question I.6, où plusieurs annoncent que si x est un entier alors χ appartient à $\mathscr{E}$. Ceci n'a aucun sens[1] puisque l'énoncé « $\chi \in \mathscr{E}$ » ne fait pas intervenir x.

Mon corrigé pour cette question comporte une erreur. À la deuxième ligne, je dis que le nombre $x + k/n$ n'est pas un rationnel, ce qui est faux en général. Le bon argument est que ce n'est pas un entier.

Partie 2

Le maximum de points réalisable sur la partie 2 est de 62. La moyenne de la classe sur cette partie est de $8,43$. Le meilleur total est de $37,25$.

	II.1	II.2.a	II.2.b	II.3	II.4.a	II.4.b	II.5.a	II.5.b	II.5.c	II.6
Barème	2	1	1,5	1,5	1	1	1	1,5	1	4
Réussite	9,1 %	7,2 %	12,5 %	12,0 %	24,0 %	47,6 %	20,2 %	24,0 %	12,5 %	0,0 %

Les premières questions pouvaient faire appel à l'unicité des coefficients (en se limitant au coefficient dominant), comme dans mon corrigé, mais ce type d'argument n'est pas très populaire. J'ai trouvé dans quelques copies un argument plus élégant, certainement plus proche de ce que l'auteur de l'énoncé avait en tête.

1. C'est comme affirmer qu'à chaque fois qu'il pleut à Paris, le chat est un mammifère. On met un lien entre deux assertions qui n'ont aucun lien entre elles.

À la question II.1, si P est un polynôme de degré 1 appartenant à $\mathscr{E}$, alors P′ est un polynôme constant non nul appartenant à $\mathscr{E}$ (d'après I.2) donc la suite associée à P′ est la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'après I.3, donc la suite associée à P est la suite constante égale à 1 d'après I.2.

La question II.2.a peut ensuite se résoudre directement en itérant cet argument.

Beaucoup d'erreurs de logique à la question II.1. L'unicité des coefficients n'est presque jamais mentionnée. Il y a parfois des divisions par 0. Les quantificateurs sont trop évasifs. Les conditions nécessaires sont confondues avec les conditions suffisantes (en d'autres termes, l'analyse est confondue avec la synthèse).

À la question II.2.b, un argument différent de celui de mon corrigé (et certainement moins compliqué) consiste à passer par une somme de Riemann. La formule (1) pour $x = 0$ donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^p} f(0).$$

Si $p \geqslant 1$, le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui donne $\int_0^1 \mathrm{P}(t)\ \mathrm{d}t = 0$ par passage à la limite.

La question II.3 a presque toujours été traitée comme une question d'unicité en délaissant le problème de l'existence.

La question II.4.a était a priori facile mais la rédaction de la démonstration par récurrence est généralement saccagée par une négligence qui rend la chose illogique. La question II.4.b était très facile mais il y a eu des erreurs de calculs et de quantification.

La question II.5.a était très facile mais massacrée par des notations horribles comme $(\varphi_n(x) - \psi_n(x))'$, qui disqualifient le propos. Le lien avec la propriété de la question II.2.a semble être repéré mais il n'est presque jamais signalé, ce qui mène à des argumentations incomplètes.

À la question II.5.b, les changements de variable ont été rarement vus. N'ayant pas détaillé ce calcul dans mon corrigé, je le fais ici.

$$\int_0^{1/n} \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1/n} \mathrm{B}_p\left(x + \frac{k}{n}\right)\ \mathrm{d}x.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Dans l'intégrale correspondant à l'indice k, on effectue le changement de variable $u = x + k/n$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$.

$$\int_0^{1/n} \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \mathrm{B}_p(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{B}_p(u)\ \mathrm{d}u = 0.$$

Pour l'autre intégrale, le changement de variable est $u = nx$.

$$\int_0^{1/n} \psi_n(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n^{p-1}} \int_0^{1/n} \mathrm{B}_p(nx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n^p} \int_0^1 \mathrm{B}_p(u)\ \mathrm{d}u = 0.$$

Partie 3

Le maximum de points réalisable sur la partie 3 est de 124. La moyenne de la classe sur cet exercice est de 11. Le meilleur total est de 26. Les questions de la dernière page ont été très peu abordées

	III.1	III.2	III.3.a	III.3.b	III.3.c	III.3.d	III.3.e	III.4.a	III.4.b	III.4.c	III.4.d
Barème	1,5	1,5	1,5	0,5	1	1	1	1	2	1	3
Réussite	18,8 %	33,7 %	47,6 %	69,2 %	18,3 %	15,4 %	0,0 %	10,1 %	1,0 %	0,0 %	1,9 %

Le résultat de la question III.1 est souvent bien deviné mais rarement bien justifié. Je suggère de travailler cela car c'est une question qui revient de temps en temps.