Chapitre 3 — intégrales généralisées

0 Fonctions continues par morceaux

0.1 Définitions

Fonction continue par morceaux sur un segment. Cas des fonctions en escalier.
Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.

0.2 Propriétés

L'ensemble $\mathcal{C}^0_m(\mathrm{I}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Soit g une fonction continue sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue par morceaux sur I.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. Soit φ une fonction continue sur un intervalle J. On suppose que φ est strictement monotone et que l'intervalle $\varphi(\mathrm{J})$ est inclus dans I. Alors la fonction $f \circ \varphi$ est continue par morceaux sur l'intervalle J.

0.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition. Exemple : calcul de $\displaystyle\int_{1/4}^{1} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \,\mathrm{d}t$.

Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

La valeur de l'intégrale ne change pas si on modifie la valeur de la fonction en un nombre fini de points. En particulier, il existe des fonctions positives d'intégrale nulle différentes de la fonction nulle.

1 Intégrales généralisées

1.1 Présentation du problème

Il s'agit de donner un sens à l'étude de l'existence d'une intégrale comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}, \qquad \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \int_{\mathbb{R}} \sin(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}, \qquad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

1.2 Intégrales généralisées sur un intervalle semi-ouvert

Convergence d'une intégrale de la forme $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ dans le cas d'une fonction f continue par morceaux à valeurs complexes. Intégrale divergente.

Idem pour les intervalles des formes $[a, b[$, $]-\infty, b]$, $]a, b]$. Intégrales faussement impropres.

Exemples de référence $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

Si f est continue par morceaux et positive sur $[a, +\infty[$, alors l'existence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à ce que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ soit majorée.

Lien avec les convergences de séries dans le cas des fonctions de la forme $x \mapsto u_{\lfloor x \rfloor}$ (plus de détails au paragraphe 3.3).

1.3 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $]a, b[$ (bornes finies ou infinies). Soit c un élément de cet intervalle. Dire que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge signifie que les deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est divergente pour toute valeur de α.

1.4 Propriétés

Linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Si f est positive, continue sur $]a, b[$ (ou tout autre type d'intervalle), si l'intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ existe et vaut 0, alors la fonction f est identiquement nulle.

Changement de variable. Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Les intégrales $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s)\ \mathrm{d}s$ sont alors de même nature ; de plus, en cas de convergence, elles sont égales.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

Influence de la parité ; de l'imparité.

Intégration par parties : on travaille uniquement avec des segments. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^1 (\ln(t))^n\ \mathrm{d}t$.

1.5 Critères de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

Critère de domination. Critère de négligeabilité. Critère d'équivalence. Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^\alpha}{t^\beta}\ \mathrm{d}t$ dans le cas $\beta < 1$.

2 Intégrabilité

2.1 Intégrale absolument convergente

Intégrale absolument convergente. Si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge aussi et vérifie la majoration

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Les fonctions dont l'intégrale converge absolument sont appelées intégrables.

Les fonctions continues par morceaux sur un segment sont intégrables.

Les critères de comparaisons s'adaptent pour prouver l'intégrabilité d'une fonction.

2.2 Propriétés algébriques

Espace vectoriel des fonctions intégrables sur I.

Espace vectoriel des fonctions (à valeurs réelles) de carré intégrable sur I.

Si f^2 et g^2 sont intégrables, alors fg est intégrable. Produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

2.3 Comparaison série-intégrale

Soit $f : [a, +\infty[$ une fonction continue par morceaux, positive et décroissante.

Alors la série $\sum f(n)$ a la même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Nature de la série $\sum 1/n(\ln(n))^\alpha$.

3 Quelques problématiques classiques

3.1 Divergence grossière ?

Il est possible que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge sans que f ne tende vers 0 en $+\infty$.

Cependant, si cette intégrale converge et f possède une limite en $+\infty$, alors cette limite est nulle.

Un exemple avec absence de limite est fourni dans l'exercice 4.

3.2 Intégrales semi-convergentes

Il arrive que l'intégrale $\displaystyle\int_\mathrm{I} f(t)\ \mathrm{d}t$ existe alors que l'intégrale $\displaystyle\int_\mathrm{I} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ diverge.

Exemples construits avec des fonctions en escaliers et des séries semi-convergentes. Un autre exemple classique est fourni dans les exercices 4 et 11.

3.3 Relation de Chasles infinie ?

Peut-on écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t$ sans se poser de questions ? La réponse est non en général.

Une condition nécessaire et suffisante est que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ tende vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

La réponse est oui si on sait que l'intégrale converge mais il faut justifier l'égalité en passant par les sommes partielles.

3.4 Linéarité infinie

Peut-on appliquer la linéarité de l'intégrale dans le cas d'une somme infinie ?

La réponse est non en général. Deux théorèmes, dans des chapitres ultérieurs, permettront de la faire sous certaines hypothèses.

3.5 Passage à la limite dans les intégrales à bornes variables

Est-il vrai que $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\ \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0 ?

Programme de colles n° 2 (du lundi 2 au vendredi 13 octobre 2017)

Tout sur le chapitre 3 (intégrales généralisées).

En guise de question de cours, on donnera à étudier la nature d'une intégrale figurant dans les trois premiers exercices de la fiche.
