**Problème 1 (*)**

Le but de ce problème est de calculer pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}t$.

**1.** Dans cette partie, on effectue des calculs préliminaires.

**a.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}\, t^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on pose alors $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, t^n\, \mathrm{d}t$ et on admet que $\mathrm{I}_0$ vaut $\sqrt{2\pi}$.

**b.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, prouver la relation de récurrence $\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$.

**c.** Pour tout entier $n$ impair, justifier que l'intégrale $\mathrm{I}_n$ est nulle.

**d.** Pour tout $p$ dans $\mathbb{N}$, prouver la relation $\mathrm{I}_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}\sqrt{2\pi}$.

**2.** Pour tout $x$ réel, prouver que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut donc maintenant poser $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, \mathrm{d}t$ pour tout $x$ réel.

**3.** Dans cette partie, on effectue un dernier calcul préparatoire.
On fixe un nombre complexe $u$ et on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : s \mapsto \mathrm{e}^{us}$.

**a.** À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, prouver pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ l'égalité

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \int_0^1 \mathrm{e}^{uy}\, u^{n+1} \frac{(1-y)^n}{n!}\, \mathrm{d}y.$$

**b.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}$. Prouver l'inégalité $\left|\mathrm{e}^u - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u^k}{k!}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|\operatorname{Re}(u)|} \dfrac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}$.

**4.** Dans cette partie, on termine le calcul. On fixe $x$ dans $\mathbb{R}$.

**a.** Soit $p$ dans $\mathbb{N}^*$. Prouver l'inégalité

$$\left|\mathrm{F}(x) - \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{\mathrm{i}^k}{k!}\, \mathrm{I}_k\, x^k\right| \leqslant \frac{x^{2p}}{(2p)!}\, \mathrm{I}_{2p}.$$

**b.** En déduire une écriture de $\mathrm{F}(x)$ sous forme d'une somme de série.

**c.** Calculer finalement cette somme pour avoir une expression simple de $\mathrm{F}(x)$.

---

**Problème 2 (**)**

On note $\mathrm{E}_0$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, nulles en 0.
On note $\mathrm{E}_1$ l'ensemble des $f$ appartenant à $\mathrm{E}_0$ telles que la fonction $t \mapsto (f(t)/t)^2$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.
On note $\mathrm{E}_2$ l'ensemble des $f$ appartenant à $\mathrm{E}_0$ telles que la fonction $(f')^2$ soit intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

L'objectif de ce problème est de justifier que les ensembles $\mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_2$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{E}_0$, de comparer ces ensembles et de comparer deux normes.

**Partie I — propriétés algébriques**

**Question 1.** Pour tout couple $(\alpha, \beta)$ d'éléments de $\mathbb{R}$, prouver la majoration $|\alpha\beta| \leqslant \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$.

**Question 2.** Pour tout couple $(f, g)$ d'éléments de $\mathrm{E}_1$, prouver que la fonction $t \mapsto f(t)g(t)/t^2$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

**Question 3.** En déduire que $\mathrm{E}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}_0$.

Pour tout couple $(f, g)$ d'éléments de $\mathrm{E}_1$, on pose $\varphi_1(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

**Question 4.** Prouver que la fonction $\varphi_1$ est un produit scalaire sur $\mathrm{E}_1$. La norme euclidienne associée à $\varphi_1$ est notée $\mathrm{N}_1$.

**Question 5.** Pour tout couple $(f, g)$ d'éléments de $\mathrm{E}_2$, prouver que la fonction $t \mapsto f'(t)g'(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

**Question 6.** En déduire que $\mathrm{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E}_0$.

Pour tout couple $(f, g)$ d'éléments de $\mathrm{E}_2$, on pose $\varphi_2(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)g'(t)\, \mathrm{d}t$.

**Question 7.** Prouver que la fonction $\varphi_2$ est un produit scalaire sur $\mathrm{E}_2$. La norme euclidienne associée à $\varphi_2$ est notée $\mathrm{N}_2$.

---

## Partie II — une inclusion

Dans les questions qui suivent, on se donne une fonction $f$ appartenant à l'ensemble $\mathrm{E}_0$ et on lui associe les fonctions $g$ et $h$ définies sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall t > 0, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}, \qquad h(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

**Question 8.** Soit $x > 0$. Prouver que les fonctions $h^2$ et $t \mapsto t(g'(t))^2$ sont intégrables sur $]0, x]$.

**Question 9.** Soit $x > 0$. Prouver l'égalité

$$\int_0^x (f'(t))^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_0^x t\,(g'(t))^2\, \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^x (h(t))^2\, \mathrm{d}t.$$

**Question 10.** Dans cette question, on suppose de plus que la fonction $f$ appartient à $\mathrm{E}_2$. Prouver alors qu'elle appartient aussi à $\mathrm{E}_1$.

On a donc prouvé l'inclusion $\mathrm{E}_2 \subset \mathrm{E}_1$.

**Question 11.** À l'aide de la fonction sinus, prouver que l'inclusion $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}_2$ est fausse.

---

## Partie III — comparaison de deux normes

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(nt)$.

**Question 12.** Pour toute fonction $f$ de $\mathrm{E}_2$, prouver l'inégalité $\mathrm{N}_1(f) \leqslant 2 \times \mathrm{N}_2(f)$.

**Question 13.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, prouver que la fonction $f_n$ est un élément de $\mathrm{E}_2$.

**Question 14.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{N}_2(f_n)^2$.

**Question 15.** Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité

$$\mathrm{N}_1(f_n)^2 = n \times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u/n}\sin^2(u)}{u^2}\, \mathrm{d}u.$$

**Question 16.** En appliquant le théorème de convergence dominée, montrer que $\mathrm{N}_1(f_n)^2$ est équivalent à $\mathrm{C} \times n$ pour une certaine constante $\mathrm{C}$ strictement positive.

**Question 17.** Les normes $\mathrm{N}_1$ et $\mathrm{N}_2$ sont-elles équivalentes ?

---

**Problème 3 (***)**

Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, une *forme linéaire* sur E est un élément de $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.
L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ est appelé *espace dual* et E et on le note $\mathrm{E}^*$.

Étant donné un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N})$, l'ensemble des formes linéaires lipschitziennes sur E (relativement à la norme N) est appelé *dual topologique* de E et on le note $\mathrm{E}'$.

Dans le cas où E est de dimension finie, on sait que toutes les formes linéaires sur E sont lipschitziennes donc $\mathrm{E}'$ est égal à $\mathrm{E}^*$ dans ce cas. Dans ce problème, on étudie quelques exemples en dimension infinie. Pour chaque exemple, une norme est précisée et on ne demande pas de justifier que c'est effectivement une norme.

La plupart des exemples étudiés sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Voici la définition de ces sous-espaces et des normes associées.

On note $\ell^\infty$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites bornées. On le munit de la norme infinie, définie par

$$||u||_\infty = \sup\{|u_n| \ ; \ n \in \mathbb{N}\}.$$

On note $c_0$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty$ constitué des suites qui convergent vers 0. On le munit également de la norme infinie.

Étant donné une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dire que cette suite est *sommable* signifie que la série $\sum |u_n|$ converge. L'ensemble des suites réelles sommables est noté $\ell^1$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on le munit de la norme définie par

$$||u||_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

On note $\ell^2$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire l'ensemble des suites $u$ pour lesquelles la série $\sum (u_n)^2$ est convergente. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on le munit du produit scalaire défini par

$$(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $|| \ ||_2$.

Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, on définit la suite $\delta_k$ de terme général

$$(\delta_k)_n = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

On peut remarquer que les suites de la forme $\delta_k$ appartiennent à tous les espaces vectoriels définis ci-dessus.

**Partie I — questions préliminaires**

**Question 1.** Soit $\varphi$ une forme linéaire sur un espace vectoriel normé $(\mathrm{E}, \mathrm{N})$.
Montrer que $\varphi$ est lipschitzienne si, et seulement si, il existe une constante $\lambda$ telle que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad |\varphi(x)| \leqslant \lambda \, \mathrm{N}(x).$$

**Question 2.** On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que la série $\sum u_n$ est divergente.

**a.** Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{(\mathrm{S}_n)^2}$ converge. Pour cela, on observera la minoration $(\mathrm{S}_n)^2 \geqslant \mathrm{S}_n \mathrm{S}_{n-1}$.

**b.** Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ diverge.

On traitera d'abord le cas de divergence grossière. On exploitera l'équivalent $-\ln(1-t) \sim t$ lorsque $t$ tend vers 0 pour traiter l'autre cas.

**Partie II — espace des suites sommables**

**Question 3.** Pour toute suite $v$ de $\ell^\infty$, montrer que l'application

$$\varphi_v : u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

est une forme linéaire sur $\ell^1$ et qu'elle est continue.

**Question 4.** Réciproquement, on considère une forme linéaire $\varphi$ continue sur $\ell^1$ et on veut prouver qu'elle est de la forme $\varphi_v$ pour une certaine suite bornée $v$.

**a.** *Analyse.* On suppose qu'il existe $v \in \ell^\infty$ telle que $\varphi = \varphi_v$.
Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité $v_k = \varphi(\delta_k)$.

**b.** *Synthèse.* Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, on pose $v_k = \varphi(\delta_k)$. Prouver que la suite $v$ ainsi définie est un élément de $\ell^\infty$.

**Question 5.** Montrer que $v \mapsto \varphi_v$ est un isomorphisme de $\ell^\infty$ sur $(\ell^1)'$.

**Partie III — espace des suites de limite nulle**

**Question 6.** Pour tout suite $u$ de $\ell^1$, montrer que l'application

$$\psi_u : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

est une forme linéaire sur $\ell^\infty$ et qu'elle est continue.

Contrairement à ce qui a été vu dans la partie précédente, il n'existe pas de réciproque : certaines formes linéaires continues sur $\ell^\infty$ ne sont pas de la forme $\psi_u$. C'est cependant vrai si on se restreint au sous-espace vectoriel $c_0$.

**Question 7.** On se donne une forme linéaire $\psi$ continue sur $c_0$. Comme dans la partie I, on définit alors une suite réelle $u$ en posant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad u_k = \psi(\delta_k).$$

**a.** Montrer que la suite $u$ est un élément de $\ell^1$.

**b.** Prouver l'égalité $\psi = \psi_u$. Pour cela, on prouvera que pour tout élément $a$ de $c_0$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \delta_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$ pour la norme $|| \; ||_\infty$.

**Question 8.** Montrer que l'application $u \mapsto \psi_u$ est un isomorphisme de $\ell^1$ sur $(c_0)'$.

**Partie IV — espace des suites de carrés sommables**

Pour tout élément $a$ de $\ell^2$, on note $\chi_a$ la forme linéaire $b \mapsto (a|b)$ définie sur $\ell^2$.

**Question 9.** Pour tout élément $a$ de $\ell^2$, montrer que $\chi_a$ est $||a||_2$-lipschitzienne.

**Question 10.** Montrer que $a \mapsto \chi_a$ est un isomorphisme de $\ell^2$ sur $(\ell^2)'$ (utiliser la question 2 pour la surjectivité).

**Question 11.** Pour tout élément $a$ de $\ell^2$, montrer que $||a||_2$ est la plus petite des constantes $\lambda$ telles que la forme linéaire $\chi_a$ soit $\lambda$-lipschitzienne.

**Remarque culturelle.** Pour toute forme linéaire $f$ de $\mathrm{E}'$, on peut montrer qu'il existe une constante $\lambda$ minimale pour laquelle $f$ est $\lambda$-lipschitzienne. Cette constante est notée $|||f|||$ et on peut montrer que $f \mapsto |||f|||$ est une norme sur $\mathrm{E}'$.

On vient de montrer l'identité $|||\chi_a||| = ||a||_2$ pour tout élément $a$ de $\ell^2$. On dit que $a \mapsto \chi_a$ est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\ell^2, || \; ||_2)$ sur son dual topologique.