Bouche-trou (***) Trouver la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n \left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n^2} \,\mathrm{d}x.$$

On appliquera bien sûr le théorème de convergence dominée.

Problème 1 : dérivée en 1 de la fonction Gamma (**)

Question préliminaire

Pour tout x dans $]0,+\infty[$ et tout $\alpha > 0$, prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, |\ln(t)|^{\alpha} \,\mathrm{d}t$ est convergente.

En particulier, pour tout ce problème, on définit

$$c = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln(t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \,\mathrm{d}t.$$

On verra plus tard dans l'année que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1} \ln(t) \,\mathrm{d}t.$$

Le but de ce problème est de démontrer que Γ est dérivable en 1, que le nombre $\Gamma'(1)$ vaut c et finalement d'exprimer c en fonction de la constante d'Euler γ, dont on rappelle qu'elle est définie par

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(-\ln(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right).$$

Première partie : dérivation

Question 1. Pour tout u réel, prouver la majoration $|\mathrm{e}^u - 1 - u| \leqslant \mathrm{e}^{|u|} \dfrac{u^2}{2}$.

On pourra s'appuyer sur la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.

Question 2. Pour tout h non nul dans le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, prouver la majoration

$$\left| \frac{\Gamma(1+h) - \Gamma(1)}{h} - c \right| \leqslant |h| \times \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\, t^{-1/2} (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{1/2} (\ln(t))^2 \,\mathrm{d}t \right).$$

Question 3. En déduire que Γ est dérivable en 1 avec $\Gamma'(1) = c$.

Deuxième partie : réécritures

On définit de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ la fonction f par

$$\forall t \in \,]0,+\infty[, \qquad f(t) = \mathrm{e}^{-t} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t} \right).$$

Question 4. Montrer que la fonction f possède une limite finie en 0.

Question 5. Montrer que la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Question 6. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t = -c$.

Question 7. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de γ.

Troisième partie : calculs auxiliaires

Dans cette partie, on va montrer que pour tout entier n strictement positif, la fonction

$$g_n : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-nt} - \mathrm{e}^{-(n+1)t}}{t}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ et vérifie l'égalité

$$\int_0^{+\infty} g_n(t)\ \mathrm{d}t = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On fixe donc un entier n strictement positif.

Question 8. Montrer que la fonction g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 9. On fixe momentanément x et y dans $]0, +\infty[$. Montrer l'égalité

$$\int_x^y g_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_{nx}^{(n+1)x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t - \int_{ny}^{(n+1)y} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Question 10. Pour tout z dans $]0, +\infty[$, montrer l'encadrement

$$\mathrm{e}^{-(n+1)z} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \int_{nz}^{(n+1)z} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\ \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-nz} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Question 11. Conclure.

Quatrième partie : fin du calcul

Question 12. Pour tout t dans $]0, +\infty[$, montrer l'égalité $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-nt} - g_n(t))$.

Question 13. À l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, exprimer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$$

en fonction de la constante d'Euler γ.

Question 14. Montrer finalement l'égalité $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Problème 2 (**)

Soient deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $u_n : x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

On suppose que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Le but de cet exercice est de prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

a. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{2\pi} (b_n \sin(nx))^2\ \mathrm{d}x$.

c. On suppose que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Au moyen du théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

d. On revient au cas général. En exploitant la suite de terme général $c_n = \min(1, |b_n|)$, montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
