Chapitre 13 — espaces euclidiens

1 Produit scalaire

Révisions sur le programme de PCSI basées sur le document d'accompagnement.

2 Isométries vectorielles

2.1 Définition et caractérisation

Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien est un endomorphisme qui préserve la norme. On parle aussi d'automorphisme orthogonal.

Caractérisation : ça équivaut à préserver le produit scalaire ; ça équivaut à envoyer une base orthonormale sur une base orthonormale. Stabilité par composition, par passage à l'inverse.

Groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathrm{E})$. Exemple : les symétries orthogonales.

Si un sous-espace vectoriel F est stable par une isométrie vectorielle, alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est stable également.

2.2 Matrices orthogonales

Ce sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ canoniquement associées aux isométries vectorielles de $\mathbb{R}^n$.

Caractérisation : ce sont les matrices de passage entre deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$ (ou de n'importe quel espace euclidien de dimension n) ; ce sont les matrices dont les colonnes forment une base orthonormale

Caractérisation : ce sont les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $\mathrm{M} \times \mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{I}_n$ (ou, de manière équivalente, la relation $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{M} = \mathrm{I}_n$.

Caractérisation matricielle des automorphismes orthogonaux.

Groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$, également noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Déterminant des matrices orthogonales. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n)$, également noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Orientation d'un espace vectoriel.

2.3 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Mesure de l'angle d'une rotation d'un plan euclidien orienté. Écriture complexe d'une rotation.

Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.

3 Endomorphismes symétriques

3.1 Définition et caractérisation

Définition d'un endomorphisme symétrique.

Caractérisation par la représentation matricielle dans une base orthonormale.

Projections orthogonales. Symétries orthogonales.

Si un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme symétrique, alors $\mathrm{F}^{\perp}$ l'est aussi.

3.2 Réduction des matrices symétriques

Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Traduction matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P telle que la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit diagonale.
