PC* — mathématiques **mardi 10 octobre 2017**
Devoir surveillé n° 3 **durée : 4 heures**

Problème 1 : pseudo-inverse d'une matrice carrée

Étant donné deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on dit que B est un *pseudo-inverse* de A si et seulement si les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \quad ; \quad \mathrm{ABA} = \mathrm{A} \quad ; \quad \mathrm{BAB} = \mathrm{B}.$$

Première partie : existence d'un pseudo-inverse

Dans cette partie, on fixe une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par A dans la base $\mathcal{B}$.

I.1. Montrer que si A possède un pseudo-inverse, alors on a l'égalité $\mathrm{Ker}(a^2) = \mathrm{Ker}(a)$. Montrer par ailleurs que cette égalité entraîne l'égalité $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^2)$.

I.2. Dans cette question, on suppose réciproquement que la matrice A vérifie l'égalité $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^2)$ et on va montrer que A possède un pseudo-inverse. On notera r le rang de la matrice A.

a. Montrer que le noyau et l'image de a sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer qu'il existe une matrice W dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice C dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité

$$\mathrm{A} = \mathrm{W} \begin{pmatrix} \mathrm{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{W}^{-1}.$$

c. En déduire que la matrice A possède au moins un pseudo-inverse.

On a alors prouvé qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A possède un pseudo-inverse est que A et A^2 aient le même rang.

Deuxième partie : unicité d'un pseudo-inverse

Dans cette partie, on suppose que la matrice A possède au moins un pseudo-inverse et on considère B, un pseudo-inverse de A quelconque. On note respectivement a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ représentés par A et B dans la base $\mathcal{B}$. On reprend les notations C et W employées à la question **I.2.b**.

II.1. a. Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par b.

b. Montrer qu'il existe une matrice D de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\mathrm{B} = \mathrm{W} \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{W}^{-1}$.

II.2. a. Montrer que $a \circ b$ est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

b. Préciser son noyau et son image en fonction de ceux de a.

c. Que vaut la matrice $\mathrm{W}^{-1}\mathrm{ABW}$?

II.3. Montrer que A admet un unique pseudo-inverse.

Troisième partie : un cas particulier

On suppose dans cette partie que la matrice A est de rang 1.

III.1. Montrer l'existence de deux matrices colonnes X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $\mathrm{A} = \mathrm{X} \times \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}$.

III.2. Décrire $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

III.3. Montrer que A possède un pseudo-inverse si et seulement si sa trace est non nulle.

III.4. Décrire le pseudo-inverse de A en cas d'existence.

Problème 2 : théorème de Borel

En début d'année, on a vu un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ strictement positive sur $]0,1[$ et nulle ailleurs.

Le but de cet exercice est de construire un autre exemple de fonction de ce type, au moyen d'une série de fonctions.

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels strictement positifs. On suppose que cette suite est décroissante et qu'elle tend vers 0. On suppose de plus que la série de terme général a_n est convergente. On note S sa somme

$$\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{1}$$

A. Pour tout x réel, on pose

$$f_0(x) = \frac{1}{2a_0^2}\left(|x+a_0| + |x-a_0| - 2|x|\right). \tag{2}$$

A.1. Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$. Préciser son expression sur $[-a_0, 0]$ et sur $[0, a_0]$. Montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et tracer rapidement son graphe.

A.2. On pose $k = 1/a_0^2$.

a. Pour tout x réel, montrer la majoration $|f_0(x)| \leqslant 1/a_0$.

b. Montrer que la fonction f_0 est k-lipschitzienne.

B. Pour tout x réel, on pose

$$f_1(x) = \frac{1}{2a_1}\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\ \mathrm{d}t. \tag{3}$$

B.1. Montrer que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

B.2. Montrer que la fonction f_1 est nulle en dehors du segment $[-a_0 - a_1, a_0 + a_1]$.

B.3. Pour tout x réel, montrer les majorations

$$|f_1(x)| \leqslant \frac{1}{a_0} \qquad \text{et} \qquad \left|f_1'(x)\right| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1}. \tag{4}$$

B.4. Montrer que la fonction f_1 est-k-lipschitzienne.

C. On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions sur $\mathbb{R}$. Les fonctions f_0 et f_1 sont les fonctions définies précédemment. Ensuite, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout x réel, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{5}$$

C.1. Pour tout entier n, montrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout entier n strictement positif, exprimer sa dérivée.

C.2. Pour tout entier n, montrer que la fonction f_n est nulle en dehors du segment

$$\mathrm{I}_n = \left[-\sum_{k=0}^{n} a_k, \sum_{k=0}^{n} a_k\right]. \tag{6}$$

C.3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout p dans $[\![0, n]\!]$ et tout x dans $\mathbb{R}$, montrer la majoration

$$\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{a_0 \cdots a_p}. \tag{7}$$

C.4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction f_n est k-lipschitzienne.

C.5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'égalité

$$\int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} f_n(t)\ \mathrm{d}t = 1. \tag{8}$$

D. Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction $k_n = f_n - f_{n-1}$. Dans cette question, on étudie la série de fonctions de terme général k_n.

D.1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $\mathbb{R}$, montrer la majoration

$$|k_n(x)| \leqslant \frac{k}{2} a_n. \tag{9}$$

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} k_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

D.2. Pour tout x réel, on pose

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n(x) \qquad \text{et} \qquad w(x) = s(x) + f_0(x). \tag{10}$$

a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction w.

b. Pour tout x réel, montrer la majoration

$$|w(x)| \leqslant \frac{1}{a_0}. \tag{11}$$

c. Montrer que la fonction w est k-lipschitzienne.

d. Montrer que la fonction w est nulle en dehors du segment $[-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$.

D.3. Montrer que la fonction w est continue sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale sur le segment $[-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$ vaut 1. On en déduit en particulier que la fonction w n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

D.4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 2} k_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En déduire que la fonction w est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, montrer la majoration $|w'(x)| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1}$.

D.5. Pour tout entier $p \geqslant 2$, montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant p+1} k_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En déduire que la fonction w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $\mathbb{R}$, montrer la majoration

$$\left|w^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{a_0 \cdots a_p}. \tag{12}$$

E. Le but de cette dernière partie est de prouver le *théorème de Borel*, qui affirme que pour tout suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait l'égalité $f^{(n)}(0) = u_n$.

On considère une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant les conditions suivantes

$$\varphi(0) = 1, \quad \forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \quad \varphi(x) = 0.$$

Une telle fonction peut être construite à l'aide de la fonction w par exemple.

On se donne une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque.

E.1. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, justifier l'existence du nombre réel

$$\lambda_p = \max_{k\in\{0,\ldots,p-1\}} \max_{x\in[-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|.$$

E.2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\beta_n = \max(1, 4^n \lambda_n |u_n|)$$

et on définit une fonction g_n par

$$g_n(x) = \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x).$$

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est nulle en dehors du segment $[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}]$.

b. Soient j et n dans $\mathbb{N}$ tels que $j < n$. Montrer l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

En déduire que $g_n^{(j)}(0)$ est nul.

c. Pour tout x réel tel que $|x| \geqslant \frac{1}{\beta_n}$, montrer que $g_n^{(j)}(x)$ est nul.

d. Pour tout x réel tel que $|x| \leqslant \frac{1}{\beta_n}$, montrer la majoration $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leqslant 2^{-(n+1)}$.

e. Pour tout couple (j, n) d'entiers naturels, montrer l'égalité

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n. \end{cases}$$

E.3. Montrer l'existence de la fonction

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n,$$

et montrer qu'elle vérifie les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(0) = u_n.$$