

**PC\* — mathématiques**  
**Devoir surveillé n° 4**

**mardi 19 décembre 2017**  
**durée : 4 heures**

Ce devoir se décline en deux versions :

- piste bleue : exercices 1, 2 et 3 ;
- piste rouge : exercices 3 et 4.

On précisera la version choisie en tête de la copie.

**Exercice 1. Puissances d'une matrice à coefficients strictement positifs**

Pour tout couple  $(x, y)$  de nombres réels, on considère la matrice  $P_{x,y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1-y & 1+y \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Question 1.** Déterminer les valeurs propres de la matrice  $P_{x,y}$  ainsi que les espaces propres associés.

**Question 2.** Quelles sont les valeurs de  $(x, y)$  pour lesquelles la matrice  $P_{x,y}$  est diagonalisable ?

Pour les trois prochaines questions, on fixe  $x$  et  $y$  dans  $] -1, 1[$ .

**Question 3.** Montrer qu'il existe un élément  $u$  de  $] -1, 1[$  et une matrice  $U$  de  $GL_2(\mathbb{R})$  tels que

$$U^{-1}P_{x,y}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

**Question 4.** En déduire que la suite de matrices  $(P_{x,y}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Sa limite est notée  $L_{x,y}$ . Préciser le rang de cette matrice.

**Question 5.** Prouver l'égalité  $L_{x,y} = \frac{1}{2+x-y} \begin{pmatrix} 1-y & 1+x \\ 1-y & 1+x \end{pmatrix}$ .

Pour la suite de ce problème, on fixe quatre éléments  $a, b, c, d$  de  $]0, +\infty[$  et on pose  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

**Question 6.** Exprimer le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice  $A$ . Ce discriminant est noté  $\Delta_A$ .

**Question 7.** Démontrer l'inégalité  $\Delta_A > 0$ .

**Question 8.** En déduire que  $A$  possède deux valeurs propres réelles distinctes. Ces deux valeurs propres sont notées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  avec la condition  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

**Question 9.** Démontrer l'inégalité  $\lambda_1 > |\lambda_2|$ .

**Question 10.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda_1$  pour que la suite  $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une limite. Cette limite est notée  $L$  dans la suite.

**Question 11.** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda_1$  pour que  $L$  soit non nulle.

**Question 12.** Dans le cas où  $L$  existe et est non nulle, montrer que l'endomorphisme

$$f_L : V \mapsto L \times V$$

de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  est le projecteur sur l'espace propre  $E_{\lambda_1}(A)$  parallèlement à l'espace propre  $E_{\lambda_2}(A)$ .

**Exercice 2. Valeurs propres non réelles des matrices réelles**

Pour tout cet exercice, on se donne un entier  $n$  supérieur ou égal à 2.

**Question 13.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $A$  possède une valeur propre non réelle  $\lambda$ . On pose

$$\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) \quad \text{et} \quad \beta = \operatorname{Im}(\lambda). \quad (1)$$

On considère un vecteur propre  $V$  de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On note  $\bar{V}$  la matrice colonne obtenue à partir de  $V$  en prenant les conjugués de ses coefficients et on pose

$$V_1 = \frac{1}{2}(V + \bar{V}), \quad V_2 = \frac{1}{2i}(V - \bar{V}). \quad (2)$$

On introduit l'endomorphisme

$$f_A : U \mapsto AU \quad (3)$$

de l'espace vectoriel réel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

a. Montrer qu'aucun vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$  ne peut appartenir à  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

b. Montrer que les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  forment une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On note  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  engendré par la famille  $(V_1, V_2)$ .

c. Exprimer  $AV_1$  et  $AV_2$  comme combinaisons linéaires de  $V_1$  et de  $V_2$ .

d. En déduire que  $F$  est stable par l'endomorphisme  $f_A$ . Relativement à la base  $(V_1, V_2)$  de  $F$ , écrire la matrice de l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f_A$ .

**Question 14.** On considère un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$  ainsi qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$ . On suppose que le polynôme caractéristique de  $f$  possède une racine non réelle.

À l'aide des résultats de la question précédente, montrer qu'il existe un plan de  $E$  stable par  $f$ .

**Question 15.** On considère un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$  ainsi qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$ . Montrer qu'il existe dans  $E$  au moins une droite ou un plan stable par  $f$ .

**Question 16.** Trouver un plan de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  stable par la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3. Théorème de Cayley-Hamilton**

On fixe un entier  $n \geq 2$ . On considère une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On rappelle que son polynôme caractéristique  $\chi_A$  est le polynôme associé à la fonction

$$t \mapsto \det(tI_n - A).$$

Ce polynôme est unitaire, de degré  $n$ , si bien qu'il existe des coefficients complexes  $f_0, \dots, f_{n-1}$  tels que

$$\chi_A = X^n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k X^k.$$

Le but de ce problème est de prouver le théorème de Cayley-Hamilton<sup>1</sup>, qui consiste en la relation

$$A^n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k A^k = 0.$$

1. Démontré dans sa généralité par Ferdinand Georg Frobenius en 1878.

Pour tout couple  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $M_{i,j}$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en effaçant la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne, puis on note  $m_{i,j}$  le déterminant de la matrice  $M_{i,j}$  et on pose  $c_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$ .

Les coefficients  $c_{i,j}$  sont appelés *cofacteurs* de la matrice  $A$  et la matrice  $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est appelée *comatrice* de la matrice  $A$ .

On rappelle le symbole de Kronecker  $\delta_{i,j}$ , qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 dans le cas contraire.

### Partie I — résultats auxiliaires

**Question 17.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on considère l'assertion  $\mathcal{P}_k$  dont l'énoncé est :

« Pour toute famille  $(G_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$  de  $k^2$  polynômes de  $\mathbb{C}_1[X]$ , si l'on considère, pour tout  $x \in \mathbb{C}$ , la matrice  $G(x) = (G_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq k}$ , la fonction  $x \mapsto \det(G(x))$  est alors polynomiale, de degré inférieur ou égal à  $k$ . ».

Prouver par récurrence que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la propriété  $\mathcal{P}_k$  est valable.

**Question 18.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On se donne des matrices  $D_0, \dots, D_p$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et on fait l'hypothèse

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \sum_{k=0}^p x^k D_k = 0.$$

Montrer que les matrices  $D_0, \dots, D_p$  sont nulles.

### Partie II — propriétés de la comatrice

**Question 19.** On considère une matrice colonne  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . On prend un indice  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et

on note  $B_j$  la matrice obtenue à partir de  $A$  en remplaçant la  $j$ -ième colonne de  $A$  par la matrice  $U$ .

Prouver l'égalité  $\det(B_j) = \sum_{k=1}^n u_k c_{k,j}$ .

**Question 20.** Pour tout couple  $(\ell, j)$  d'éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , montrer l'égalité  $\sum_{k=1}^n a_{k,\ell} c_{k,j} = \det(A) \times \delta_{\ell,j}$ .

**Question 21.** En déduire l'égalité  ${}^t C \times A = \det(A) \times I_n$ .

### Partie III — démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{C}$ , on note  $G(x)$  la transposée de la comatrice de  $xI_n - A$ .

**Question 22.** Montrer qu'il existe des matrices  $B_0, \dots, B_{n-1}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k B_k.$$

**Question 23.** En utilisant les résultats des parties précédentes, prouver les égalités matricielles suivantes

$$\begin{cases} -B_0 A &= f_0 I_n \\ B_{k-1} - B_k A &= f_k I_n \\ B_{n-1} &= I_n. \end{cases} \quad \text{pour tout } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$$

**Question 24.** Conclure.

**Exercice 4. Dualité, endomorphismes nilpotents et théorème de Jordan**

On considère un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Sa dimension est notée  $n$  et on suppose que  $n$  est supérieur ou égal à 2.

Une *forme linéaire* sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers  $\mathbb{C}$ , c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ . Cet espace vectoriel est noté  $E^*$ . On l'appelle *le dual* de  $E$ .

**Partie I — base duale**

Dans cette partie, on considère une base  $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$  de  $E$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $b_j^*$  la forme linéaire sur  $E$  définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_j^*(b_i) = \delta_{i,j},$$

où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker (égal à 1 si  $i = j$ , égal à 0 dans le cas contraire).

**Question 25.** Rappeler rapidement pourquoi cette formule définit bien des éléments de  $E^*$ .

**Question 26.** Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Écrire la matrice de  $b_i^*$  relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et (1).

**Question 27.** Montrer que la famille  $(b_1^*, \dots, b_n^*)$  est une base de  $E^*$ . On l'appelle *base duale* de la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et on la note  $\mathcal{B}^*$ .

**Question 28.** Soit  $\ell \in E^*$ . On note  $L$  sa matrice relativement aux bases  $\mathcal{B}$  et (1). Exprimer le vecteur colonne  $M_{\mathcal{B}^*}(\ell)$  en fonction de  $L$ .

**Question 29.** Pour tout  $x \in E$ , justifier l'égalité  $x = \sum_{j=1}^n b_j^*(x) b_j$ .

**Question 30.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Prouver l'identité

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_j^*(x) b_i.$$

**Partie II — transposé d'un endomorphisme**

Étant donné un endomorphisme  $u$  de  $E$ , pour toute forme linéaire  $\ell$  sur  $E$ , l'application  $\ell \circ u$  est encore une forme linéaire sur  $E$ . On peut donc définir une application

$${}^t u : \ell \mapsto \ell \circ u$$

de  $E^*$  vers  $E^*$ . Cette application est manifestement linéaire, si bien que  ${}^t u$  est un endomorphisme de  $E^*$ , qu'on appelle *transposé* de l'endomorphisme  $u$  de  $E$ .

**Question 31.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $A$  sa matrice relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que la matrice de  ${}^t u$  relativement à la base  $\mathcal{B}^*$  est la matrice  ${}^t A$ .

**Question 32.** Montrer que  $u \mapsto {}^t u$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{L}(E^*)$ .

**Question 33.** Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$ . Quel est le transposé de  $u \circ v$  ?

**Question 34.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $u^k$  est l'endomorphisme nul de  $E$ . Montrer que  $({}^t u)^k$  est l'endomorphisme nul de  $E^*$ .

## Partie III — orthogonalité

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On appelle *orthogonal* de  $F$  l'ensemble

$$F^\perp = \{\ell \in E^* ; F \subset \text{Ker}(\ell)\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E^*$ .

**Question 35.** Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . On la complète en une base  $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$  de  $E$ , ce qui permet de considérer sa base duale  $\mathcal{F}^*$ .

Montrer alors l'égalité

$$F^\perp = \text{Vect}(f_{p+1}^*, \dots, f_n^*).$$

En déduire la dimension de  $F^\perp$ .

**Question 36.** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E^*$ . On pose

$$G = \bigcap_{\ell \in V} \text{Ker}(\ell).$$

Montrer l'égalité  $G^\perp = V$ .

**Question 37.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si  $F^\perp$  est stable par  ${}^t u$ .

## Partie IV — endomorphismes nilpotents et réduction de Jordan

Dans cette partie, on suppose que  $u$  est un endomorphisme nilpotent de  $E$ , ce qui signifie qu'il existe un entier  $d$  tel que  $u^d$  soit l'endomorphisme nul de  $E$ . On suppose aussi que  $u$  n'est pas l'endomorphisme nul.

Dans toute cette partie, on considère un vecteur  $x$  non nul de  $E$  et on introduit l'entier

$$p = \min\{k \in \mathbb{N} ; u^k(x) = 0_E\}.$$

On considère alors la famille de vecteurs  $\mathcal{F}_x = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$  et on note  $F_x$  le sous-espace vectoriel de  $E$  qu'elle engendre.

**Question 38.** Montrer que la famille  $\mathcal{F}_x$  est une base de  $F_x$ .

**Question 39.** Vérifier que  $F_x$  est stable par  $u$ . Écrire la matrice de l'endomorphisme de  $F_x$  induit par  $u$  relativement à la base  $\mathcal{F}_x$ . Cette matrice est notée  $J_p$ .

**Question 40.** Montrer qu'il existe un élément  $\ell$  de  $E^*$  tel que  $\ell(u^{p-1}(x)) \neq 0$ .

On fixe alors une telle forme linéaire  $\ell$  et on considère la famille de formes linéaires  $\mathcal{L} = (\ell, {}^t u(\ell), \dots, {}^t u^{p-1}(\ell))$ .

**Question 41.** Montrer que  $\mathcal{L}$  est une famille libre. On note  $V$  le sous-espace vectoriel de  $E^*$  qu'elle engendre.

**Question 42.** On pose

$$G = \bigcap_{\lambda \in V} \text{Ker}(\lambda).$$

Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ .

**Question 43.** Montrer que  $G$  et  $F_x$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Question 44.** Montrer qu'il existe une base de  $E$  relativement à laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la forme  $J_p$  (réduction de Jordan).