

Corrigé du devoir en temps libre n° 6

Problème I — Polynômes de matrices

Question 1. Si P est le polynôme nul, alors la matrice $P(M)$ est nulle. Le polynôme nul appartient donc à l'ensemble $\text{Ann}(M)$.

Soient P et Q deux éléments de $\text{Ann}(M)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On obtient

$$(P + \lambda Q)(M) = P(M) + \lambda Q(M) = 0 + \lambda \times 0 = 0$$

donc $P + \lambda Q$ est un élément de $\text{Ann}(M)$.

On a prouvé que $\text{Ann}(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.

Question 2. Soient P dans $\text{Ann}(M)$ et Q dans $\mathbb{C}[X]$. On trouve

$$(P \times Q)(M) = P(M) \times Q(M) = 0 \times Q(M) = 0$$

donc $P \times Q$ est un élément de $\text{Ann}(M)$.

Question 3. La famille $(M^k)_{0 \leq k \leq n^2}$ compte $n^2 + 1$ vecteurs. C'est une famille de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension n^2 , donc c'est une famille liée.

Il existe donc des nombres complexes $a_0, \dots, a_{n^2}$ non tous nuls vérifiant l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n^2} a_k M^k = 0.$$

Ainsi, le polynôme $\sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ est un élément non nul de $\text{Ann}(M)$.

Question 4. On connaît la relation $R = A - BQ$. Le polynôme A est dans $\text{Ann}(M)$; le polynôme BQ est dans $\text{Ann}(M)$ d'après le résultat de la question 2. D'après le résultat de la question 3, on en déduit que R est dans $\text{Ann}(M)$.

Question 5. L'ensemble proposé n'est pas vide car l'ensemble $\text{Ann}(M)$ possède au moins un polynôme non nul. C'est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc il possède un plus petit élément.

Question 6. Considérons un polynôme P de degré d dans $\text{Ann}(M)$. Notons α son coefficient dominant, qui est donc non nul. Le polynôme $B = P/\alpha$ est alors un polynôme unitaire de degré d est c'est un polynôme annulateur de M .

Soit A un polynôme unitaire de degré d appartenant à $\text{Ann}(M)$. Notons Q et R le quotient et le reste dans la division euclidienne de A par B . Le polynôme R est alors un élément de $\text{Ann}(M)$ de degré strictement inférieur à celui de B . Le polynôme R est donc nul : dans le cas contraire, son degré serait un élément strictement inférieur à d dans l'ensemble de la question 5.

Ainsi, on obtient la relation $A = B \times Q$. Les polynômes A et B ont le même degré donc Q est un polynôme constant. Ils ont aussi le même coefficient dominant donc Q est égal à 1.

On a prouvé l'égalité $A = B$. Le polynôme B est donc unique en tant que polynôme annulateur de M unitaire de degré d .

Question 7. L'inclusion $\{\mu_M \times Q ; Q \in \mathbb{C}[X]\} \subset \text{Ann}(M)$ est une conséquence de la question 2.

Réciproquement, prenons un polynôme P appartenant à $\text{Ann}(M)$. Notons Q et R son quotient et son reste dans la division euclidienne par μ_M .

Comme prouvé à la question 4, le polynôme R appartient à $\text{Ann}(M)$. Son degré est strictement inférieur à celui de μ_M donc c'est le polynôme nul. On en déduit l'égalité $P = \mu_M \times Q$.

Par double inclusion, on a prouvé l'égalité $\text{Ann}(M) = \{\mu_M \times Q ; Q \in \mathbb{C}[X]\}$.

Question 8. Le polynôme X est un polynôme annulateur de la matrice nulle. Il est unitaire et son degré vaut 1. Aucun polynôme constant non nul n'est un polynôme annulateur de la matrice nul donc X est de degré minimal dans $\text{Ann}(0)$. Le polynôme X est donc le polynôme minimal de la matrice nulle.

Le polynôme $X - 1$ est un polynôme annulateur de la matrice I_n . Le même raisonnement prouve que c'est son polynôme minimal.

Question 9. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Le calcul donne directement

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_2 - M) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

On obtient donc $\chi_M = X^2 - (a + d)X + ad - bc$.

Question 10. Le calcul donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a + d)b \\ (a + d)c & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

puis

$$\chi_M(M) = A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a + d)b \\ (a + d)c & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme χ_M est donc un polynôme annulateur de la matrice M .

Question 11. Le polynôme χ_M est un polynôme annulateur de la matrice M unitaire de degré 2. Aucun polynôme constant non nul n'est un polynôme annulateur de M . Aucun polynôme de la forme $X - \alpha$ n'est un polynôme annulateur de M car ça nécessiterait l'égalité $M = \alpha I_2$.

Le polynôme χ_M est donc un polynôme annulateur unitaire de degré minimal pour M : c'est son polynôme minimal.

Question 12. Soient Q_1 et Q_2 dans $\mathbb{C}_k[X]$. Soit λ dans $\mathbb{C}$. On trouve

$$\begin{aligned} \varphi(Q_1 + \lambda Q_2) &= ((Q_1 + \lambda Q_2)(x_0), \dots, (Q_1 + \lambda Q_2)(x_k)) = (Q_1(x_0) + \lambda Q_2(x_0), \dots, (Q_1)(x_k) + \lambda Q_2(x_k)) \\ &= (Q_1(x_0), \dots, Q_1(x_k)) + \lambda(Q_2(x_0), \dots, Q_2(x_k)) = \varphi(Q_1) + \lambda\varphi(Q_2). \end{aligned}$$

L'application φ est donc linéaire.

Soit Q un élément de $\text{Ker}(\varphi)$. Le polynôme Q possède donc au moins $k + 1$ racines (à savoir $x_0, \dots, x_k$). C'est un polynôme de degré au plus k donc c'est le polynôme nul. L'application φ est donc injective.

L'application φ est linéaire, injective et est définie entre deux espaces vectoriels de dimension finie ayant la même dimension. C'est donc un isomorphisme.

Question 13. Soit i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. Le polynôme L_i est de degré k car c'est le produit de k polynômes de degré 1. Le polynôme P' est donné par

$$P' = \sum_{\ell=0}^k \prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq \ell}} (X - x_j).$$

Quand on évalue ce polynôme en x_i , on remarque que tous les termes de la somme s'annulent sauf celui d'indice $\ell = i$. Il reste

$$P'(x_i) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq i}} (x_i - x_j) \neq 0.$$

On reconnaît là le dénominateur dans la formule qui définit le polynôme L_i . Le coefficient dominant du polynôme L_i est donc égal à $1/P'(x_i)$.

Question 14. Soit i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. La définition du polynôme L_i prouve que pour tout indice j distinct de i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, le nombre x_j est une racine de L_i , ce qui s'écrit $L_i(x_j) = 0$. On trouve de plus

$$L_i(x_i) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \neq i}} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = 1.$$

Question 15. On trouve

$$\varphi(L_0) = (1, 0, \dots, 0), \quad \varphi(L_1) = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \varphi(L_k) = (0, \dots, 0, 1).$$

La famille $(\varphi(L_0), \dots, \varphi(L_k))$ est donc la base canonique de $\mathbb{C}^{k+1}$.

La famille $(L_0, \dots, L_k)$ est l'image d'une base de $\mathbb{C}^{k+1}$ par l'isomorphisme φ^{-1} donc c'est une base de $\mathbb{C}_k[X]$.

Question 16. Soit Q dans $\mathbb{C}_k[X]$. La linéarité de φ donne

$$\varphi \left(\sum_{i=0}^k Q(x_i) L_i \right) = \sum_{i=0}^k Q(x_i) \varphi(L_i).$$

On a vu que la famille $(\varphi(L_0), \dots, \varphi(L_k))$ est la base canonique de $\mathbb{C}^{k+1}$ donc

$$\sum_{i=0}^k Q(x_i) \varphi(L_i) = (Q(x_0), \dots, Q(x_k)) = \varphi(Q).$$

On obtient donc $\varphi \left(\sum_{i=0}^k Q(x_i) L_i \right) = \varphi(Q)$. Par injectivité de φ , il vient

$$\sum_{i=0}^k Q(x_i) L_i = Q.$$

Question 17. Pour tout j dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, on trouve

$$X^j = \sum_{i=0}^k (x_i)^j L_i.$$

La matrice représentative de $\mathcal{B}$ relativement à la base $\mathcal{L}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & (x_0)^k \\ 1 & x_1 & \cdots & (x_1)^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & \cdots & (x_k)^k \end{pmatrix}.$$

On reconnaît une matrice de Vandermonde. Son déterminant vaut $\prod_{0 \leq i < j \leq k} (x_j - x_i)$.

Question 18. Cette question demande simplement de prouver que φ est une bijection. On le sait depuis la question 12.

Question 19. Soit i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. Remarquons l'égalité

$$P = P'(x_i)L_i \times (X - x_i),$$

qui donne l'égalité matricielle $P(M) = P'(x_i)L_i(M) \times (M - x_iI_n)$. Prenons un vecteur U de $\text{Ker}(M - x_iI_n)$. On obtient alors

$$P(M)U = P'(x_i)L_i(M) \times \underbrace{(M - x_iI_n)U}_{=0} = 0$$

donc U est aussi un élément de $\text{Ker}(P(M))$. On a prouvé l'inclusion

$$\text{Ker}(M - x_iI_n) \subset \text{Ker}(P(M)).$$

Question 20. On connaît déjà l'égalité

$$M^0U = U = U_0 + U_1 + \cdots + U_k = (x_0)^0U_0 + (x_1)^0U_1 + \cdots + (x_k)^0U_k.$$

Soit maintenant un entier naturel p pour lequel l'égalité

$$M^pU = (x_0)^pU_0 + \cdots + (x_k)^pU_k$$

est vérifiée. Multiplions à gauche par M . On obtient

$$M^{p+1}U = (x_0)^pMU_0 + \cdots + (x_k)^pMU_k.$$

Pour tout indice i , le vecteur U_i est dans $\text{Ker}(M - x_iI_n)$, ce qui donne $MU_i = x_iU_i$ donc

$$M^{p+1}U = (x_0)^{p+1}U_0 + \cdots + (x_k)^{p+1}U_k.$$

Par récurrence, on peut conclure que l'égalité $M^pU = (x_0)^pU_0 + \cdots + (x_k)^pU_k$ est valable pour tout entier naturel p .

Question 21. Soit un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$. Écrivons ce polynôme sous la forme $\sum_{p=0}^s q_p X^p$. On trouve alors

$$\begin{aligned} Q(M)U &= \sum_{p=0}^s q_p M^p U = \sum_{p=0}^s q_p \sum_{i=0}^k (x_i)^p U_i \\ &= \sum_{i=0}^k \left(\sum_{p=0}^s q_p (x_i)^p \right) U_i = \sum_{i=0}^k Q(x_i) U_i. \end{aligned}$$

Question 22. Soit un indice i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. Pour éviter les conflits de notations, prenons la lettre j pour l'indice muet dans la somme de la question précédente.

$$L_i(M)U = \sum_{j=0}^k \underbrace{L_i(x_j)}_{=0 \text{ si } j \neq i} U_j = L_i(x_i)U_i = U_i.$$

Question 23. L'unicité qui vient d'être prouvée justifie que la somme des noyaux $\text{Ker}(M - x_i I_n)$, pour i variant de 0 à k , est directe. Il reste à prouver que cette somme vaut $\text{Ker}(P(M))$ tout entier.

Pour cela, prenons un vecteur U quelconque de $\text{Ker}(P(M))$. Pour tout entier i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, introduisons le vecteur colonne $U_i = L_i(M)U$. On trouve alors

$$U_0 + \dots + U_k = (L_0 + \dots + L_k)(M)U$$

or la somme $L_0 + \dots + L_k$ vaut 1 d'après les calculs vus à la question 17, donc

$$U_0 + \dots + U_k = I_n \times U = U.$$

Enfin, prenons i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$. On trouve

$$(M - x_i I_n)U_i = (M - x_i I_n) \times L_i(M) \times U,$$

or le polynôme $(X - x_i) \times L_i$ vaut $P'(x_i)$ donc c'est un polynôme annulateur de M . On obtient donc l'égalité $(M - x_i I_n)U_i = 0$, qui prouve que U_i appartient à $\text{Ker}(M - x_i I_n)$.

On a alors prouvé que U appartient à la somme (directe) des $\text{Ker}(M - x_i I_n)$, où l'indice i décrit $\llbracket 0, k \rrbracket$.

La synthèse est terminée. On a prouvé que la somme de ces noyaux est égale à $\text{Ker}(P(M))$ et que cette somme est directe (ce dernier point est en fait un résultat du cours, que l'on démontré ici par une autre manière).

Question 24. La matrice $P(M)$ est nulle donc son noyau est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tout entier. On obtient donc l'égalité

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{i=0}^k \text{Ker}(M - x_i I_n).$$

Ainsi, en concaténant des bases des espaces vectoriels $\text{Ker}(M - x_i I_n)$, où i varie de 0 à k , on obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont tous les vecteurs sont des vecteurs propres de la matrice M .

On a prouvé ici un théorème de l'ancien programme : toute matrice carrée admettant un polynôme annulateur scindé à racines simples est diagonalisable.

Problème 2

Question 25. Si B est nulle, alors tous les blocs $a_{i,j}B$ sont nuls donc la matrice $A \otimes B$ est nulle. Si A est nulle, alors tous les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls donc tous les blocs $a_{i,j}B$ sont nuls donc la matrice $A \otimes B$ est nulle.

Réciproquement, supposons que A et B sont toutes les deux non nulles. Il existe un couple (i, j) d'indices pour lequel le coefficient $a_{i,j}$ est non nul. Le bloc $a_{i,j}B$ est donc non nul. La matrice $A \otimes B$ est donc non nulle.

On a prouvé que l'égalité $A \otimes B = 0$ équivaut à $(A = 0 \text{ ou } B = 0)$.

Question 26. Fixons B dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$. Prenons A et C dans $\mathcal{M}_{\ell,n}$ ainsi que λ dans $\mathbb{C}$. On obtient alors

$$(A + \lambda C) \otimes B = \begin{pmatrix} (a_{1,1} + \lambda c_{1,1})B & \cdots & (a_{1,n} + \lambda c_{1,n})B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{\ell,1} + \lambda c_{\ell,1})B & \cdots & (a_{\ell,n} + \lambda c_{\ell,n})B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}B & \cdots & a_{\ell,n}B \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_{1,1}B & \cdots & c_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\ell,1}B & \cdots & c_{\ell,n}B \end{pmatrix} = A \otimes B + \lambda C \otimes B.$$

La linéarité à gauche est démontrée.

Maintenant, fixons A dans $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$. Prenons B et D dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$ ainsi que λ dans $\mathbb{C}$. On obtient alors

$$A \otimes (B + \lambda D) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(B + \lambda D) & \cdots & a_{1,n}(B + \lambda D) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}(B + \lambda D) & \cdots & a_{\ell,n}(B + \lambda D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}B & \cdots & a_{\ell,n}B \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1}D & \cdots & a_{1,n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}D & \cdots & a_{\ell,n}D \end{pmatrix} = A \otimes B + \lambda A \otimes D.$$

La linéarité à droite est démontrée. On a prouvé que l'application $(A, B) \mapsto A \otimes B$ est bilinéaire.

Question 27. Remarquons pour commencer que tous les produits matriciels écrits existent, aussi bien $A \times B$ et $C \times D$ que $(A \otimes C) \times (B \otimes D)$. Ce dernier produit existe car $A \otimes C$ est dans $\mathcal{M}_{\ell r, nt}(\mathbb{C})$ et $B \otimes D$ est dans $\mathcal{M}_{nt, pv}(\mathbb{C})$. On effectue ce produit matriciel par blocs.

$$\begin{aligned} (A \otimes C) \times (B \otimes D) &= \begin{pmatrix} a_{1,1}C & \cdots & a_{1,n}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}C & \cdots & a_{\ell,n}C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,1}D & \cdots & b_{1,p}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}D & \cdots & b_{n,p}D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{1,1}b_{1,1} + \cdots + a_{1,n}b_{n,1})CD & \cdots & (a_{1,1}b_{1,p} + \cdots + a_{1,n}b_{n,p})CD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{\ell,1}b_{1,1} + \cdots + a_{\ell,n}b_{n,1})CD & \cdots & (a_{\ell,1}b_{1,p} + \cdots + a_{\ell,n}b_{n,p})CD \end{pmatrix} \\ &= (A \times B) \otimes (C \times D). \end{aligned}$$

Question 28. Le calcul donne $(A \otimes C) \times (A^{-1} \otimes C^{-1}) = I_n \otimes I_p = I_{np}$ donc la matrice $A \otimes C$ est inversible et son inverse est $A^{-1} \otimes C^{-1}$.

Question 29. La matrice M s'écrit $A \otimes C$ en choisissant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A vaut 3, ce qui est non nul, donc A est inversible. On trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de C , on trouve

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 - C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -C_2 + C_3 - C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de C permettent d'engendrer la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ donc elles forment une famille génératrice de cet espace (donc une base puisqu'il y a 3 colonnes). La matrice C est la matrice de passage de la base canonique vers (C_1, C_2, C_3) . On en déduit que cette matrice est inversible et que son inverse est la matrice de passage dans l'autre sens, ce qui donne

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice M est inversible et que son inverse est

$$M^{-1} = A^{-1} \otimes C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 30. La matrice A est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$ (d'après le théorème de d'Alembert). Il existe donc une matrice P dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

La matrice $P \otimes I_p$ est inversible, d'inverse $P^{-1} \otimes I_p$, et on trouve

$$(P \otimes I_p)^{-1} \times (A \otimes C) \times (P \otimes I_p) = T \otimes C = \begin{pmatrix} t_{1,1}C & \cdots & \cdots & t_{1,n}C \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n}C \end{pmatrix}.$$

Deux matrices semblables ont le même déterminant donc

$$\det(A \otimes C) = \det(T \otimes C) = \prod_{k=1}^n \det(t_{k,k}C) = \det(C)^n \prod_{k=1}^n (t_{k,k})^p = \det(C)^n \det(T)^p = \det(C)^n \det(A)^p.$$

Question 31. Si $A \otimes C$ est inversible, alors $\det(A \otimes C)$ est non nul donc $\det(C)^n \det(A)^p$ est non nul donc $\det(C)$ et $\det(A)$ sont non nuls donc les matrices A et C sont inversibles.

Question 32. Il suffit de prendre A triangulaire supérieure stricte et non nulle et de choisir B triangulaire inférieure stricte et non nulle.

La matrice $A \otimes B$ est alors triangulaire supérieure stricte et non nulle. La matrice $B \otimes A$ est triangulaire inférieure stricte et non nulle. Ces deux matrices ne peuvent pas être égales.

Question 33. On peut remarquer que la base canonique de $\mathcal{M}_{np,1}(\mathbb{C})$ peut s'écrire aussi bien

$$(U_1 \otimes V_1, \dots, U_1 \otimes V_p, \dots, U_n \otimes V_1, \dots, U_n \otimes V_p)$$

que

$$(V_1 \otimes U_1, \dots, V_1 \otimes U_n, \dots, V_p \otimes U_1, \dots, V_p \otimes U_n).$$

Notons $\mathcal{B}$ cette base et notons $\mathcal{C}$ la base de $\mathcal{M}_{np,1}(\mathbb{C})$ obtenue en réordonnant les vecteurs de la première présentation de façon à calquer la numérotation de la deuxième présentation

$$\mathcal{C} = (U_1 \otimes V_1, \dots, U_n \otimes V_1, \dots, U_1 \otimes V_p, \dots, U_n \otimes V_p).$$

Pour tout couple (i, j) d'indices, observons les formules

$$(A \otimes B) \times (U_i \otimes V_j) = (AU_i) \otimes (BV_j) \quad \text{et} \quad (B \otimes A) \times (V_j \otimes U_i) = (BV_j) \otimes (AU_i).$$

On observe alors que les coefficients de la décomposition de $(A \otimes B) \times (U_i \otimes V_j)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont les mêmes que ceux de la décomposition de $(B \otimes A) \times (V_j \otimes U_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi, la matrice de $W \mapsto (A \otimes B) \times W$ dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice de $W \mapsto (B \otimes A) \times W$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice $B \otimes A$.

En notant P la matrice de passage $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, la formule de changement de base pour les représentations de l'endomorphisme $f : W \mapsto (A \otimes B) \times W$ s'écrit

$$P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P = M_{\mathcal{C}}(f), \quad \text{c'est-à-dire} \quad P^{-1}(A \otimes B)P = B \otimes A.$$

Question 34. Il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale. Il existe une matrice Q de $GL_p(\mathbb{C})$ telle que la matrice $Q^{-1}BQ$ soit diagonale.

La matrice $P \otimes Q$ est inversible, d'inverse $P^{-1} \otimes Q^{-1}$. On trouve donc

$$(P \otimes Q)^{-1} \times (A \otimes B) \times (P \otimes Q) = (P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ).$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$.

Notons $\mu_1, \dots, \mu_p$ les coefficients diagonaux de $Q^{-1}BQ$.

On observe alors que la matrice $(P^{-1}AP) \otimes (Q^{-1}BQ)$ est diagonale, de coefficients diagonaux

$$\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_1\mu_p, \dots, \lambda_n\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_p.$$

On a prouvé que la matrice $A \otimes B$ est semblable à une certaine matrice diagonale. La matrice $A \otimes B$ est donc diagonalisable.

Question 35. La matrice M se met sous la forme $A \otimes B$ en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les polynômes caractéristiques de A et B sont tous deux scindés, à racines simples

$$\chi_A = X^2 - 2X = X(X - 2) \quad \text{et} \quad \chi_B = (X + 1)(X - 1).$$

Ces deux matrices sont donc diagonalisables, avec des espaces propres de dimension 1. Je ne détaille pas la recherche des espaces propres. On peut choisir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour avoir

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en prenant

$$R = P \otimes Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

la matrice R est inversible et on obtient

$$R^{-1}MR = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 36. Prenons pour A n'importe quelle matrice non diagonalisable et pour B la matrice nulle. La matrice $A \otimes B$ est alors la matrice nulle, qui est diagonalisable.

Pour construire une matrice non diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut prendre une matrice triangulaire supérieure stricte différente de la matrice nulle. Une telle matrice admet 0 pour unique valeur propre ; si elle était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale dont tous les coefficients sont nuls donc ce serait la matrice nulle, mais ce n'est pas le cas.

Question 37. On fait le même calcul qu'à la question 8, à ce détail près que les matrices $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ sont seulement supposées triangulaires supérieures.

La matrice $(P \otimes Q)^{-1}(A \otimes B)(P \otimes Q)$ est alors triangulaire supérieure et sa diagonale admet, dans cet ordre, les coefficients

$$\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_1\mu_p, \dots, \lambda_n\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_p.$$

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc le polynôme caractéristique de $A \otimes B$ est égal à celui de la matrice triangulaire supérieure mentionnée ci-dessus, c'est-à-dire

$$(X - \lambda_1\mu_1) \times \dots \times (X - \lambda_1\mu_p) \times (X - \lambda_n\mu_1) \times \dots \times (X - \lambda_n\mu_p), \text{ qui s'écrit également } \prod_{a=1}^n \prod_{b=1}^p (X - \lambda_a\mu_b).$$

Question 38. Soit W un élément de $E(U)$. Il s'écrit sous la forme $U \otimes V$ pour un certain élément V de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. On trouve alors

$$(A \otimes B) \times W = (A \otimes B) \times (U \otimes V) = (AU) \otimes (BV) = (\lambda U) \otimes (BV).$$

Utilisons maintenant la bilinéarité justifiée à la question 2

$$(A \otimes B) \times W = \lambda(U \otimes (BV)) = U \otimes (\lambda BV).$$

Ceci prouve que $(A \otimes B) \times W$ est dans $E(U)$. Cet espace vectoriel est stable par $A \otimes B$.

Question 39. L'application u est linéaire d'après la bilinéarité de la question 2. La définition de $E(U)$ donne directement $\text{Im}(u) = E(U)$ donc u est surjective.

Prenons V dans le noyau de u . La matrice $U \otimes V$ est nulle mais U ne l'est pas donc V est nulle d'après le résultat de la question 1. L'application u est donc injective.

On a prouvé que u est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ sur $E(U)$.

Question 40. Notons f l'endomorphisme de $E(U)$ induit par l'endomorphisme $W \mapsto (A \otimes B) \times W$ de $\mathcal{M}_{np,1}(\mathbb{C})$. D'après la propriété admise dans le préambule de cette partie II, l'endomorphisme f est diagonalisable. Il existe donc une base de $E(U)$ constituée de vecteurs propres de f .

D'après le résultat de la question précédente, la dimension de $E(U)$ est la même que celle de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire p . Considérons une base $(W_1, \dots, W_p)$ de $E(U)$ constituée de vecteurs propres de f .

Pour tout k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, posons $V_k = u^{-1}(W_k)$. L'application u^{-1} est un isomorphisme donc $(V_1, \dots, V_p)$ est une base de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Pour tout k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, notons μ_k la valeur propre de f associée au vecteur propre W_k et remarquons l'égalité $W_k = U \otimes V_k$.

Soit k dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. On connaît l'égalité $f(W_k) = \mu_k W_k$. Celle-ci se réécrit

$$(A \otimes B) \times (U \otimes V_k) = \mu_k U \otimes V_k.$$

Or le calcul donne

$$(A \otimes B) \times (U \otimes V_k) = (AU) \otimes (BV_k) = (\lambda U) \otimes (BV_k) = U \otimes (\lambda BV_k).$$

On obtient donc $u(\lambda BV_k) = u(\mu_k V_k)$. L'injectivité de u donne ensuite $\lambda BV_k = \mu_k V_k$. La valeur propre λ de A a été supposée non nulle donc $BV_k = (\mu_k/\lambda)V_k$.

Ainsi, la base $(V_1, \dots, V_p)$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ est constituée de vecteurs propres de B . La matrice B est donc diagonalisable.

Question 41. La matrice $A \otimes B$ est semblable à une certaine matrice diagonale D . Une telle matrice ne peut pas être nulle car sinon, la matrice $A \otimes B$ serait nulle aussi. L'un des coefficients diagonaux de D est donc non nul. La matrice $A \otimes B$ possède donc au moins une valeur propre non nulle.

On a vu à la question 13 que les valeurs propres de $A \otimes B$ sont exactement les nombres de la forme $\lambda \times \mu$, où λ est une valeur propre de A et μ est une valeur propre de B . La matrice $A \otimes B$ possède une valeur propre non nulle donc A et B possèdent chacune au moins une valeur propre non nulle.

Le résultat de la question précédente permet d'en déduire que B est diagonalisable.

De plus, on a vu dans la partie II que les matrices $A \otimes B$ et $B \otimes A$ sont semblables. On peut donc conclure, en inversant les rôles de A et de B , que la matrice A est diagonalisable aussi.

Question 42. Notons M la matrice de l'énoncé. Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que M s'écrit $A \otimes B$.

Dans un premier temps, supposons que M est diagonalisable.

Si on suppose que la matrice B n'est pas nulle, alors la matrice M n'est pas nulle. Elle vérifie les hypothèses de la question 17 donc les matrices A et B sont toutes deux diagonalisables. C'est cependant faux pour la matrice A : en effet, sa seule valeur propre est 1 ; si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice I_2 donc égale à I_2 , ce qui n'est pas le cas. Cette contradiction prouve que la matrice B est nulle.

Réciproquement, si la matrice B est nulle, alors la matrice M est nulle donc diagonalisable.

Ainsi, il y a exactement un choix de la matrice B qui rend la matrice M diagonalisable, à savoir le choix $B = 0$.

Complément : démonstration de la propriété admise dans l'énoncé.

On a vu dans le devoir surveillé précédent que si une matrice possède un polynôme annulateur scindé, à racines simples, alors elle est diagonalisable. La réciproque est vraie également : si M est diagonalisable, alors le polynôme $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(M)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de M (on le démontre en faisant intervenir une matrice diagonale semblable à M).

Cette propriété se transmet bien sûr aux endomorphismes.

Considérons donc un endomorphisme u de l'espace vectoriel E et supposons que u est diagonalisable. Il possède donc un polynôme annulateur P scindé, à racines simples.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Notons v l'endomorphisme de F induit par u . Pour tout x dans F , on trouve

$$P(v)(x) = P(u)(x) = 0,$$

donc $P(v)$ est l'endomorphisme nul de F . L'endomorphisme v admet un polynôme annulateur scindé, à racines simples, donc il est diagonalisable. ♡
