Exercice 1. (*) Soient A et M deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait l'hypothèse $M^2 + M = A$.

a. Montrer que M laisse stables les espaces propres de A .

b. On suppose que A est diagonalisable et que ses espaces propres sont de dimension 1. Montrer que toute base de diagonalisation de A en est une aussi pour M . Préciser les liens entre les valeurs propres de A et celles de M .

c. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dans le cas

$$A = \begin{pmatrix} -30 & -24 \\ 48 & 38 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (*) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que f est diagonalisable. Montrer l'égalité

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f^2).$$

La réciproque est-elle vraie?

Exercice 3. ()** Soit un entier $n \geq 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $B^2 = A$ (une telle matrice est une *racine carrée* de la matrice A).

Soit $\lambda \in]-\infty, 0[$. On suppose que λ est une valeur propre de A . Montrer que l'espace propre $E_\lambda(A)$ est stable par B puis, en considérant l'endomorphisme $U \mapsto BU$ de cet espace propre, prouver que la dimension de cet espace propre est un entier pair.

b. Dans cette question, réciproquement, on suppose que pour toute valeur propre strictement négative de A , l'espace propre correspondant est de dimension paire. Prouver alors que A possède une racine carrée.

On pourra commencer par trouver une racine carrée de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit F un plan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que F est stable par A si, et seulement si, la droite $F^\perp$ est dirigée par un vecteur propre de A^T .

Trouver les plans stables par la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. ()** Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables. On suppose que cette suite converge vers une certaine matrice A .

Cette matrice est-elle alors forcément diagonalisable?

Exercice 6. ()** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On veut prouver que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

a. Montrer que c'est vrai dans le cas où A est inversible.

b. On revient au cas général. On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ et on pose $f(z) = \det(\lambda I_n - (A - zI_n)B) - \det(\lambda I_n - B(A - zI_n))$ pour tout z dans $\mathbb{C}$.

Pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus \text{Sp}(A)$, prouver que $f(z)$ est nul.

c. Conclure.

Exercice 7. Rayon spectral d'une matrice carrée (.***)**

Pour tout ce problème, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A)$ son *rayon spectral*, défini par $\rho(A) = \max\{|z| ; z \in \text{Sp}(A)\}$.

Pour toute matrice colonne $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. On rappelle que l'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$N_\infty(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que l'application N_∞ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Pour toute matrice colonne x dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, montrer la majoration $\|Ax\|_\infty \leq N_\infty(A)\|x\|_\infty$.

b. Montrer l'égalité $N_\infty(A) = \max_{\substack{x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$.

c. Montrer l'inégalité $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.

3. Montrer que N_∞ est une norme matricielle, ce qui signifie ceci

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \quad N_\infty(AB) \leq N_\infty(A)N_\infty(B).$$

4. Pour toute matrice Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, on note N_Q l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N_Q : A \mapsto N_\infty(Q^{-1}AQ).$$

a. Montrer que N_Q est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Pour chaque matrice Q dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer l'existence d'une constante réelle C_Q strictement positive vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \frac{1}{C_Q}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq C_Q N_\infty(A).$$

5. On fixe $\varepsilon > 0$.

a. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer l'existence de $s \in]0, +\infty[$ tel qu'en notant D_s la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients diagonaux $s, s^2, \dots, s^n$ (dans cet ordre), on ait la relation suivante

$$N_{D_s}(T) \leq \rho(T) + \varepsilon.$$

b. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que l'inégalité $N_\varepsilon(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$ ait lieu.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A)$ est strictement inférieur à 1.

Exercice 8. (*) On définit sur $[-1, 1]$ la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}^2(x)$.

a. Pour tout x dans $] - 1, 1[$, prouver la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

b. Prouver que la fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $] - 1, 1[$ et exprimer son développement en série entière sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^{2n}.$$

Le coefficient d_n sera exprimé sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier.

c. Pour tout x dans $] - 1, 1[$, prouver l'égalité $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$.

d. En déduire une relation de récurrence entre les coefficients d_n puis trouver une expression simplifiée de d_n .

Exercice 9. Convergence d'une série au sens d'Abel (*)**

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Dire que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge au sens d'Abel signifie que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

possède une limite finie quand x tend vers 1 en restant dans $]0, 1[$. En cas d'existence, cette limite finie est appelée *somme d'Abel* de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$.

1. Dans cette partie, on étudie quelques exemples.

a. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ converge au sens d'Abel et calculer sa somme d'Abel.

b. Même question pour la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n n$.

c. La série $\sum_{n \geq 0} 1$ converge-t-elle au sens d'Abel ?

d. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le produit de Cauchy de ces deux suites.

On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent au sens d'Abel. Prouver alors que la série $\sum c_n$ converge également au sens d'Abel et préciser sa somme d'Abel.

2. Dans cette partie, on prouve le *théorème d'Abel*, qui affirme que la convergence d'une série implique sa convergence au sens d'Abel.

On considère donc une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge (au sens usuel). Pour tout entier N , on pose alors

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n.$$

a. Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut au moins 1.

On peut donc définir sur l'intervalle $] - 1, 1[$ la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on peut définir f en 1 aussi.

b. Pour tout x dans $] - 1, 1[$, prouver la relation

$$f(x) = f(1) - (1 - x) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n.$$

c. On fixe $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

d. On garde les notations ε et n_0 de la question précédente. Pour tout x dans $[0, 1[$, prouver l'inégalité

$$|f(x) - f(1)| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

e. Conclure.

3. Dans cette partie, on prouve le *théorème de Tauber*, qui est une réciproque partielle du théorème d'Abel.

On considère une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel. Sa somme d'Abel est notée A . Pour tout x dans $] - 1, 1[$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Enfin, on suppose que la suite $(na_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0. Pour tout N dans $\mathbb{N}$, on pose alors

$$\mu_N = \sup \{ |na_n| ; n \geq N + 1 \}.$$

a. Prouver que la suite $(\mu_N)_{N \geq 0}$ converge vers 0.

b. Soit x dans $[0, 1[$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $1 - x^k \leq k(1 - x)$.

c. Soient x dans $[0, 1[$ et N dans $\mathbb{N}$. Prouver la majoration

$$\left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \frac{\mu_N}{N} \times \frac{1}{1 - x}.$$

d. Soient x dans $[0, 1[$ et N dans $\mathbb{N}$. Prouver la majoration

$$\left| \sum_{k=0}^N a_k - f(x) \right| \leq (1 - x) \sum_{k=1}^N |ka_k| + \frac{\mu_N}{N} \times \frac{1}{1 - x}.$$

e. Prouver le théorème de Cesàro : si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe convergente, de limite ℓ , alors la suite de terme général

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$$

converge également vers ℓ .

f. Prouver que la suite de terme général $\sum_{k=0}^N a_k - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)$ converge vers 0.

g. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} a_k$ est convergente et préciser sa somme.